



ConBRepro

X CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO



02 a 04
de dezembro 2020

Verificação e Aplicação de Transferência de Calor em Malhas Generalizadas

Matheus Miranda Guimarães do Nascimento

Coordenação de Engenharia Química – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Gisely Luzia Ströher

Coordenação de Química – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Gylles Ricardo Ströher

Coordenação de Engenharia Química – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resumo: A transferência de calor pelo modo da condução pode ser avaliada por meio da Equação da Difusão de Calor e devido ao fato de os sistemas de coordenadas tradicionais como cartesiano, cilíndrico e esférico têm limitações para descrever geometrias complexas uma alternativa é utilizar o sistema de coordenadas generalizadas. Neste contexto, o objetivo do presente trabalho foi implementar e verificar a solução numérica da Equação da Difusão de Calor para diferentes geometrias bidimensionais sem a necessidade de constante transformação de coordenadas. Assim, utilizou-se o sistema de coordenadas generalizadas discretizado pelo método de volumes finitos (MVF) em sua forma totalmente implícita. A utilização do MVF é dada pelo fato de ser um método conservativo, ou seja, a quantidade de energia em cada volume permanece conservada na escala local. O sistema de equações resultantes da discretização foi resolvido por meio do método de Gauss-Seidel. No algoritmo desenvolvido adotou-se as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin. A verificação da condição de contorno de Dirichlet foi realizada comparando a resposta do algoritmo com a solução analítica. Para as condições de contorno de Neumann e Robin comparou-se os dados obtidos pelo algoritmo com um aplicativo comercial. As respostas obtidas em ambas condições tiveram um comportamento de acordo com a distribuição térmica apresentada pelo programa comercial. Desta forma, o algoritmo foi verificado permitindo o seu uso em diferentes geometrias com diferentes propriedades térmicas e físicas. Além disso, sugeriu-se um estudo térmico, utilizando o algoritmo desenvolvido no presente trabalho, em exames oncológicos para identificação de tumores em tecidos humanos.

Palavras-chave: Volumes Finitos, Malhas Generalizadas, Transferência de Calor, Dirichlet, Neumann, Robin.

Verification and Application of Heat Transfer in Generalized Mesh

Abstract: Heat transfer by conduction can be computed using heat diffusion equation and knowing the restrictions that traditional coordinate systems such as cartesian, cylindrical and spherical have to describe more complexed geometry the alternative is to use generalized coordinate system. The main goal of this work was to implement and verify the numeric solution to the heat diffusion equation to two-dimensional distinct geometries without having to change constantly coordinates. Therefore, the generalized coordinate system was discretized by using finite volume method (FVM) in its fully implicit scheme. The motivation to use FVM is for the fact that it is a conservative method

in which the quantity of energy at each volume remains conserved at local scale. The system of equations from the discretization was solved by Gauss-Seidel method. The developed algorithm assumed Dirichlet, Neumann and Robin boundary conditions. Dirichlet's boundary condition was verified by using the analytic equation. For Neumann and Robin boundary conditions it was used a commercial app to compare data with the present work. The response obtained in both conditions had an answer accordingly to thermic analysis given by the commercial app. Consequently, the algorithm was verified allowing it to be used in different geometries with different physical and thermic properties. Besides, it was suggested a thermic study using the algorithm in oncologic exams to identify tumors in humans' tissues.

Keywords: Finite Volume, Generalized Mesh, Heat Transfer, Dirichlet, Neumann, Robin.

1. Introdução

Fenômenos de transporte é a área da ciência que estuda sistemas em desequilíbrio, ou seja, sistemas nos quais ocorre uma distribuição não uniforme da grandeza intensiva de interesse, o que provoca um fluxo da grandeza extensiva correspondente, cuja tendência é restabelecer o equilíbrio do sistema. (FARIAS, 2011)

Um exemplo de fenômeno de transporte é a transferência de calor que pode ocorrer por meio de três mecanismos: difusão, convecção e radiação. A difusão de calor, de acordo com Bi (2018), é a transferência de energia interna pelas colisões de partículas microscópicas e o movimento dos elétrons dentro de um corpo. Tais partículas podem ser moléculas, átomos e elétrons.

De acordo com Bejan (2013), a convecção derivada do verbo em Latim *convectore* are o que significa reunir ou carregar para um local é o estudo da transferência de calor sob efeito do escoamento de um fluido.

A radiação térmica é a energia emitida pela matéria que se encontra a uma temperatura não nula sendo ela transmitida não apenas em superfícies sólidas, mas em gases e líquidos. (INCROPERA et al, 2000)

A equação que descreve o fenômeno de difusão de calor possui soluções analíticas para geometrias mais simples como paredes e cilindros. No entanto, para geometrias mais complexas não é factível o uso de soluções analíticas e também de sistemas de coordenadas convencionais, alternativamente, recorre-se ao uso de um novo sistema de coordenadas computacional denominadas coordenadas generalizadas ou arbitrarias e em conjunto com uma técnica numérica de solução de equações diferenciais parciais.

De acordo com Maliska (2017), em meados da década de 1970, os sistemas coordenados ortogonais convencionais começaram a ceder espaço para os sistemas coordenados generalizados coincidentes com a fronteira do domínio, e o método dos volumes finitos (MVF) passou a resolver problemas em geometrias irregulares.

Isso se deve ao fato de que o MVF é robusto devido a sua característica conservativa, ou seja, a quantidade de energia seja ela mássica, calórica ou momento permanece conservada na escala local. Além de que os fluxos de volumes adjacentes são diretamente balanceados. (KOLDITZ, 2002)

Nesse contexto, o presente trabalho tem como objetivo calcular a distribuição térmica nas condições de contorno de Dirichlet, Robin e Neumann. Posteriormente será verificado cada condição com a solução analítica e com um aplicativo comercial, respectivamente. Para isso a equação da difusão de calor em coordenadas cartesianas será transformada para o sistema de coordenadas generalizadas. Logo após, o método de volumes finitos será aplicado para encontrar um conjunto de equações lineares e tal conjunto será resolvido utilizando o método de Gauss-Seidel. Por fim, aplicar-se-á o algoritmo em duas geometrias e analisará a distribuição de temperatura.

2. Materiais e Métodos

A implementação do código e os resultados apresentados no presente trabalho foram obtidos com um notebook com processador Intel® Core™ i5, memória RAM de 8 GB, sistema operacional Windows 10 Home Single Language de 64 bits.

A equação da difusão do calor em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{S} \quad (1)$$

As considerações utilizadas no presente trabalho são regime não permanente em duas dimensões (x,y). Logo, a Equação 1 em coordenadas generalizadas é dada pela Equação 2: (DELGADO, 2012)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho C_p T}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\alpha_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{12} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) kJ \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\alpha_{21} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) kJ \right] + \frac{S}{J} \quad (2)$$

Em que ξ e η são as novas coordenadas do sistema, J é o jacobiano representado pela Equação 3 e os termos α_{ij} são coeficientes da equação descritos pelas Equações 4 a 6.

$$J = (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) = (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)^{-1} \quad (3)$$

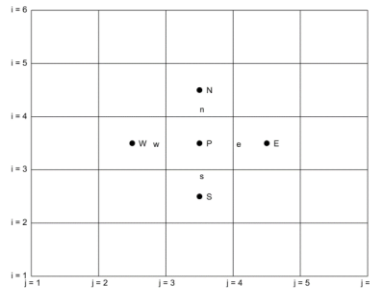
$$\alpha_{11} = J^{-2} (\xi_x^2 + \xi_y^2) \quad (4)$$

$$\alpha_{21} = J^{-2} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \quad (5)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = J^{-2} (\xi_x \eta_x + \xi_x \eta_y) \quad (6)$$

A Figura 1 representa a malha computacional com o volume de controle definido em torno do ponto P para a aplicação do MVF. Sendo os pontos W, E, N e S os pontos vizinhos ao P. Por outro lado, os pontos w, e, n, s são os pontos de fronteira do volume de controle adotado.

Figura 1 – Volume de Controle



Fonte: Autoria Própria (2020)

Com o volume de controle definido aplica-se, então, o método de volumes finitos na Equação 2 obtendo-se a Equação 7.

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho C_p T}{J} \right) d\eta d\xi d\tau = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \int_w^e \int_s^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(\alpha_{11} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{12} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) kJ \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\alpha_{21} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \alpha_{22} \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) kJ \right] + \frac{S}{J} \right\} d\eta d\xi d\tau \quad (7)$$

Após resolver a Eq. 8 e adotar a sua forma totalmente implícita obtém-se a Eq. 9:

$$A_p T_p = A_e T_e + A_w T_w + A_n T_n + A_s T_s + A_{ne} T_{ne} + A_{nw} T_{nw} + A_{sw} T_{sw} + A_{se} T_{se} + B \quad (8)$$

Em que cada subíndice indica em qual ponto cada termo está sendo calculado, os coeficientes são dados por:

$$A_e = \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} \alpha_{11} J_e \Gamma_e^\Phi + \frac{1}{4} \alpha_{21} (J_n k_n - J_s k_s) \quad (9)$$

$$A_n = \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \alpha_{22} J_n \Gamma_n^\Phi + \frac{1}{4} \alpha_{12} (J_e k_e - J_w k_w) \quad (10)$$

$$A_s = \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta} \alpha_{22} J_s \Gamma_s^\Phi + \frac{1}{4} \alpha_{12} (J_w k_w - J_e k_e) \quad (11)$$

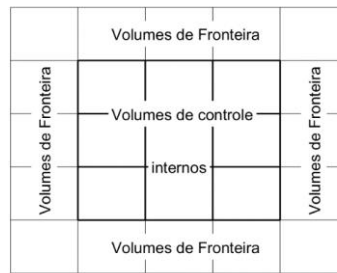
$$A_{ne} = \frac{1}{4} (\alpha_{21} J_n k_n + \alpha_{12} J_e k_e) \quad (12)$$

$$A_{se} = -\frac{1}{4} (\alpha_{21} J_s k_s + \alpha_{12} J_e k_e) \quad (13)$$

Os demais coeficientes apresentados na Equação 8 podem ser facilmente obtidos de obtidos e podem ser encontrados em Farias (2011). E o sistema linear formado por tal equação foi resolvido utilizando o método de Gauss-Siedel, implementado pelos autores do presente trabalho.

Para as condições de contorno utilizou-se o método de volumes fictícios representados pela Figura 2.

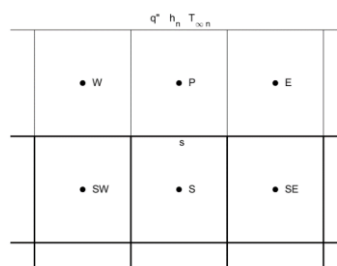
Figura 2 – Método de volumes fictícios



Fonte: Autoria Própria

Adotou-se os três tipos de condições de contorno, sendo elas: Dirichlet, Neumann e Robin. Para utilizar a condição de contorno de Dirichlet basta assumir um valor infinito para a constante de convecção (h). Com isso a Figura 3 exemplifica as condições de contorno na região norte do volume de fronteira.

Figura 3 – Volume Fictício na região norte



Fonte: Autoria Própria (2020)

A Equação 14 representa a equação para a temperatura no ponto P pertencente ao volume fictício.

$$[h_n(T_{\infty n} - T_s) + q'']\sqrt{\alpha_{22}} = k_s J_s \left(\alpha_{22s} \frac{(T_p - T_s)}{\Delta\eta} + \alpha_{21s} \frac{(T_E + T_{SE} - T_W - T_{SW})}{4\Delta\xi} \right) \quad (14)$$

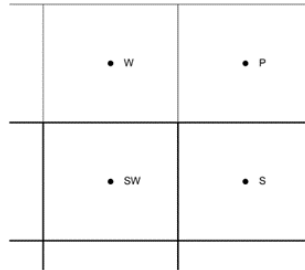
Em que h_n representa a constante de convecção, W/m^2K ; $T_{\infty n}$ a temperatura ambiente na região norte, K. Para T_s utiliza-se a Equação 15.

$$T_s = \frac{T_p + T_s}{2} \quad (15)$$

Caso o leitor se interesse sobre as outras condições de contorno elas podem ser facilmente encontradas em Ozisik (2002).

Para os volumes nos vértices, conforme a Figura 4, adotou-se a média simples entre os pontos W, SW e S.

Figura 4 – Volumes do canto nordeste



Fonte: Autoria Própria (2020)

A Equação 16 representa a solução analítica da equação da difusão do calor com as considerações já citadas anteriormente e com temperatura igual a 0°C em suas fronteiras.

$$T(x, y, t) = \frac{4T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [(-1)^{n+1} + 1][(-1)^{m+1} + 1] e^{-\alpha \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \pi^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)}{nm} \quad (16)$$

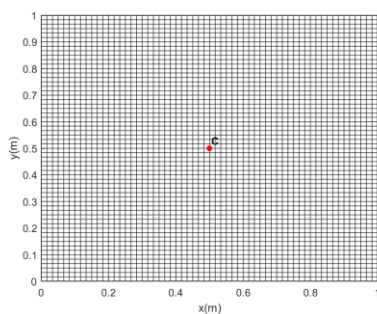
Em que T_0 representa a temperatura para a condição inicial, t é o tempo decorrido na troca de calor, a e b o tamanho da geometria em comprimento e altura, respectivamente e (x, y) as coordenadas espaciais.

3. Resultados e discussões

As condições de contorno adotadas na validação do algoritmo desenvolvido no presente trabalho são 0°C para as regiões norte, sul, leste e oeste. A condição inicial utilizou-se 50 °C. As propriedades utilizadas foram: $k = 300 \text{ W/(m K)}$, $C_p = 1.000 \text{ J/(Kg K)}$, $\rho = 1.000 \text{ Kg/m}^3$, $\tau = 80 \text{ s}$, $\Delta\tau = 0,01 \text{ s}$ e a tolerância estipulado foi de 1×10^{-5} .

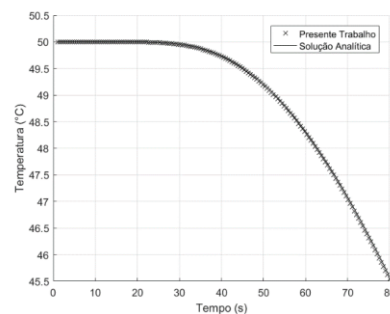
Com as condições de contorno, inicial e propriedades definidas simulou o algoritmo para uma geometria retangular de 1x1 metro com malha de 60x60 nós. A Figura 5 representa a malha utilizada no estudo da condução de calor e a Figura 6 ilustra a comparação entre a solução analítica e numérica no centro da geometria retangular (Ponto C).

Figura 5 – Malha ortogonal de 60x60 pontos



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 6 – Comparação solução analítica com numérica no ponto C da geometria

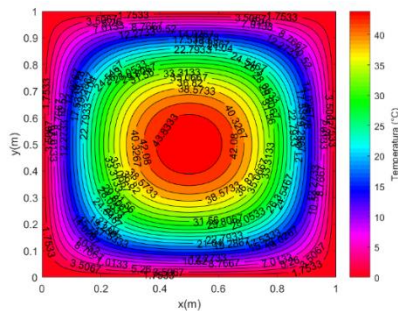


Fonte: Autoria Própria (2020)

Observa-se que a solução numérica desenvolvida no presente trabalho tem um comportamento muito próximo à solução analítica. Observou-se que o maior distanciamento nos resultados foi de 0,0082°C, cerca de 0,018%.

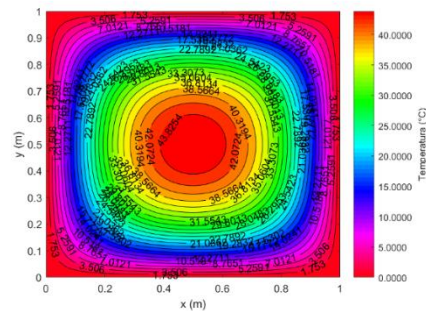
As Figuras 7 e 8 representam a distribuição de temperatura da solução analítica e numérica em toda a geometria estudada.

Figura 7 – Distribuição de temperatura solução analítica



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 8 – Distribuição de temperatura solução numérica



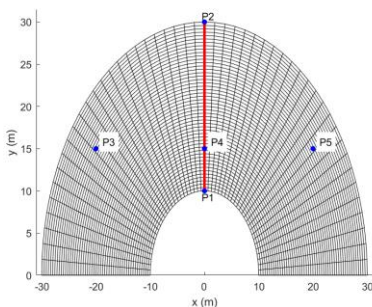
Fonte: Autoria Própria (2020)

Observa-se, também, que há uma boa concordância de resultados em toda a geometria utilizada na distribuição de calor. O maior distanciamento de temperatura foi de 0,0246°C indicando, mais uma vez, que o algoritmo desenvolvido no presente trabalho foi desenvolvido corretamente.

As Figuras 5 a 7 indicam que para a condição de Dirichlet o algoritmo desenvolvido pode ser aplicável. Então, para validar nas outras condições de contorno comparou-se os resultados obtidos na condição de contorno de Robin com um programa comercial. Assim, os resultados ilustrados nas Figuras 9 a 12 mostram tal comparação.

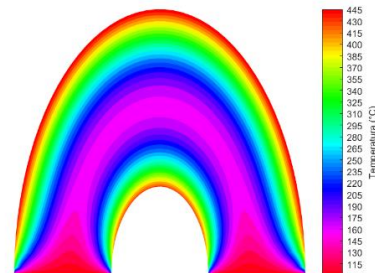
As condições de contorno utilizadas para a simulação de transferência de calor são: temperatura inicial igual a 20°C, temperaturas nas arestas norte e sul equivalentes a 100°C. Nas arestas leste e oeste adotou-se um coeficiente de convecção (h) de 1 W/m²K com uma temperatura ambiente igual a 500°C. Adotou-se um valor para a difusividade térmica (α) igual a 0,1 m²/s, critério de parada de resolução do sistema linear de 1x10⁻⁵ e condutividade térmica de 1 W/m.K.

Figura 9 – Malha não ortogonal



Fonte: Autoria Própria (2020)

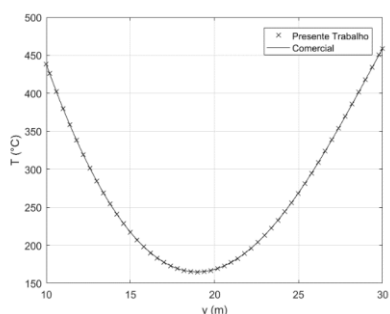
Figura 10 – Distribuição de Temperatura em 100s para a condição de Robin



Fonte: Autoria Própria (2020)

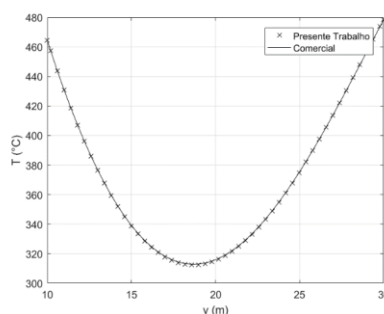
Uma indicação que o algoritmo foi implementado de maneira correta é que as temperaturas máximas e mínimas estão de acordo com as condições de contorno, uma vez que norte e sul possuem temperaturas constantes e as temperaturas nas fronteiras leste e oeste não podem ultrapassar 500°C. Portanto, para validar essa hipótese as Figura 11 e 12 ilustram a comparação entre os pontos P1 e P2 ilustrados na Figura 9 com a solução do presente trabalho e a do aplicativo comercial com 100 e 200s, respectivamente, de exposição a temperatura ambiente.

Figura 11 – Comparação dos perfis de temperatura entre os pontos P1 e P2 em 100s



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 12 – Comparação dos perfis de temperatura entre os pontos P1 e P2 em 200s



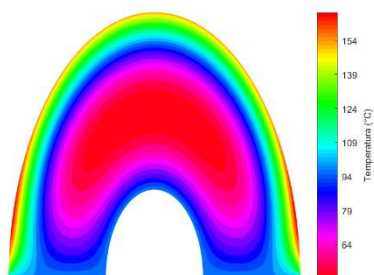
Fonte: Autoria Própria (2020)

As Figuras 11 e 12 mostram que os dados obtidos por meio algoritmo desenvolvido no presente trabalho estão em conformidade com o apresentado pelo programa comercial indicando mais uma vez que o código implementado está correto.

A fim de verificar exaustivamente o código implementado, utilizou-se as mesmas propriedades descritas no caso anterior, alterando apenas as condições de contorno, para as regiões norte, sul e oeste adotou-se 100°C e na região leste utilizou-se $q'' = 20 \text{ W/m}^2$.

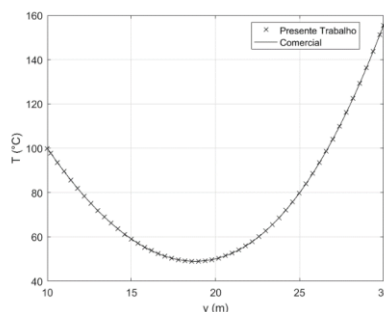
Com isso, as Figuras 13 e 14 ilustram a distribuição de calor na geometria representada pela Figura 9 e a comparação com a solução comercial entre os pontos P1 e P2, respectivamente.

Figura 13 – Análise térmica com condição de contorno de Neumann



Fonte: Autoria Própria (2020)

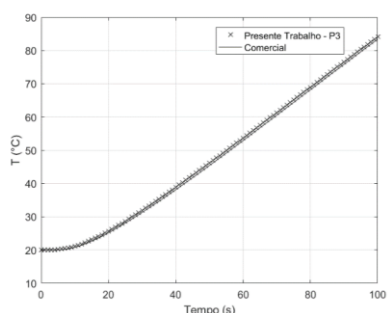
Figura 14 – Análise térmica comparativa dos pontos P1 a P2 em 100s



Fonte: Autoria Própria (2020)

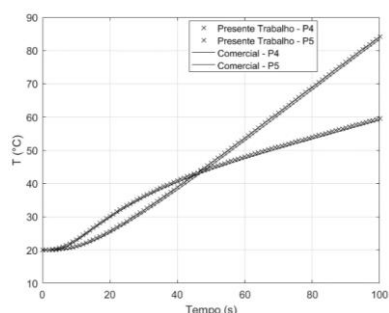
A Figura 14 mostra que o presente trabalho também está de acordo com o aplicativo comercial ao utilizar a condição de contorno de Neumann. O próximo passo foi escolher os pontos P3, P4 e P5 e comparar com os resultados do programa comercial para finalizar a verificação do código, os resultados são apresentados nas Figuras 15 e 16.

Figura 15 – Comparação térmica em P3 do presente trabalho com o comercial.



Fonte: Autoria Própria (2020)

Figura 16 – Análise térmica comparativa em P4 e P5 do presente trabalho com o comercial



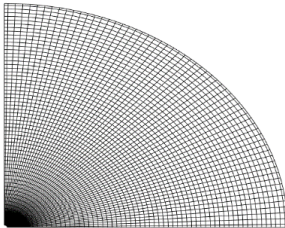
Fonte: Autoria Própria (2020)

Os perfis dados nas Figuras 15 e 16, novamente reforçam que a metodologia e a implementação numérica proposta no presente trabalho estão corretas.

É importante lembrar que o sistema de coordenadas generalizado permite trabalhar com espaçamentos não constante possibilitando o refinamento da malha e, conseqüentemente, obtendo os valores de temperaturas em mais pontos da geometria estudada.

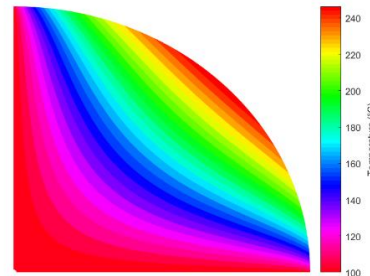
Com o algoritmo validado para as três condições de contorno, aplicou-as elas para obter distribuição térmica de diferentes malhas, como pode-se visualizar nas Figuras 17 a 20.

Figura 17 – Malha não ortogonal



Fonte: Aatoria Própria (2020)

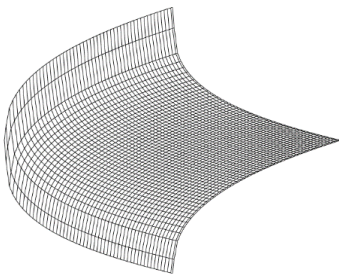
Figura 18 – Análise térmica



Fonte: Aatoria Própria (2020)

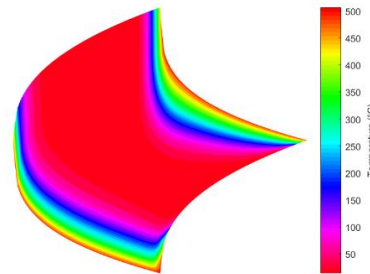
As propriedades utilizadas na distribuição de temperatura são as mesmas utilizadas na validação para a condição de Robin e Neumann. As condições de contornos foram utilizadas em norte e sul com temperatura igual a 100°C, na região oeste fluxo de calor constante igual a 0 W/m² e na região leste a constante de convecção igual a 1 W/m²K e temperatura ambiente igual a 500°C.

Figura 19 – Malha não ortogonal



Fonte: Aatoria Própria (2020)

Figura 20 – Distribuição de temperatura



Fonte: Aatoria Própria (2020)

As propriedades utilizadas na análise térmica da Figura 20 foram: $k = 20 \text{ W/(m K)}$, $C_p = 800 \text{ J/(Kg K)}$, $\rho = 200 \text{ Kg/m}^3$, $\tau = 200\text{s}$, $\Delta t = 1\text{s}$ e a tolerância estipulado foi de 1×10^{-5} .

Com as distribuições ilustradas acima observa-se que a utilização de coordenadas generalizadas é benéfica por conseguir se adaptar a diferentes geometrias e com a utilização do método de volume finitos para a discretização consegue uma resposta muito próxima da realidade. Com o algoritmo exaustivamente verificado, pode-se também, aplicar para calcular a distribuição térmica e analisa-la em tecidos humanos com a presença de um tumor como foi representado na pesquisa de Nascimento (2020).

4. Conclusão

No presente trabalho a equação da difusão do calor foi transformada das coordenadas cartesianas para as coordenadas generalizadas. Posteriormente, utilizou-se do método de volumes finitos para encontrar um conjunto de equações equivalentes a cada temperatura no seu respectivo ponto. Cada equação foi resolvida utilizando o método de Gauss-Seidel com critério de parada de 10^{-5} . As comparações e análises térmicas indicaram que o

algoritmo desenvolvido está de acordo a solução analítica e com o aplicativo comercial apresentando uma diferença máxima de 0,0246 °C o que provê ao algoritmo uma larga abrangência no estudo de diversas áreas de análises térmicas.

Referências

- BEJAN, A. Convection heat transfer. John wiley & sons, 2013.
- BI, Z. Finite Element Analysis Applications. 1. ed. Elsevier, 2018. v. 1.
- DELGADO JMPQ, LIMA AGB, SILVA, MV, Numerical analysis of heat and mass transfer in porous media. Berlin: Springer, 2012.
- FARIAS, VS. de O. Difusão 3d em sólidos com forma arbitrária usando coordenadas generalizadas. [Tese de Doutorado]. Campina Grande. Universidade Federal de Campina Grande, 2011.
- INCROPERA FP, DEWITT DP, BERGMAN TL, Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.
- KOLDITZ O. Finite Volume Method. In: Computational Methods in Environmental Fluid Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg. 2002. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04761-3_8
- MALISKA CR, Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2017.
- NASCIMENTO, M. M. G. do; STRÖHER, G. L; STRÖHER, G. R. BREVE ANÁLISE TÉRMICA BIDIMENSIONAL DA TIREOIDE HUMANA NA PRESENÇA DE TUMOR.. In: Anais do I Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia. Anais...Diamantina(MG) Online, 2020. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/icobicet2020/258151-BREVE-ANALISE-TERMICA-BIDIMENSIONAL-DA-TIREOIDE-HUMANA-NA-PRESENCA-DE-TUMOR>>. Acesso em: 21/09/2020 04:22
- OZISIK MN, ORLANDE HRB, KASSAB AJ, Inverse heat transfer: fundamentals and applications. Appl. Mech. Rev., v. 55, n. 1, 2002.