



ConBRepro

XIV CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

I CIGELUBRA

Congresso Internacional de Gestão e Engenharia Luso-Brasileiro

04 a 06 de dezembro de 2024

Energias Limpas nas Engenharias

Aplicação De Um Modelo De Programação Linear Inteira Mista Na Distribuição De Aulas No Novo Ensino Médio Em Um Colégio Estadual Do Paraná

Paula Fernanda Gomes Vieira

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) - UFPR

Viviane Cristhyne Bini Conte

Departamento de Matemática - UTFPR

Paulo Henrique Siqueira

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) - UFPR

Resumo: A distribuição da carga horária nas escolas enfrenta desafios significativos, especialmente com a implementação do Novo Ensino Médio no Paraná e em outras regiões do Brasil. Atualmente, os modelos tradicionais de alocação de horários muitas vezes não contemplam adequadamente as aulas assíncronas, características do cenário do novo ensino médio noturno. Para lidar com essa questão, este trabalho busca adaptar um modelo matemático baseado em programação linear e aplicá-lo em uma escola na região metropolitana de Curitiba. O objetivo é otimizar a distribuição de aulas e horas de atividade entre 36 professores e 10 turmas. Essa abordagem visa equilibrar as necessidades dos alunos, os recursos disponíveis e as demandas dos professores, contribuindo para a melhoria do ambiente educacional do colégio estadual onde o estudo foi aplicado.

Palavras-chave: Distribuição de Carga Horária, Novo Ensino Médio no Paraná, Programação Linear.

Application of a Mixed-Integer Linear Programming Model in Class Allocation for the New High School Curriculum at a State School in Paraná

Abstract: The School timetabling faces significant challenges, especially with the implementation of the New High School in Paraná and other regions of Brazil. Currently, traditional models of scheduling often do not adequately accommodate these asynchronous classes, which are characteristic of the new evening high school scenario. To address this issue, this work aims to adapt a mathematical model based on linear programming and apply it in a school located in the metropolitan region of Curitiba. The goal is to optimize the distribution of classes and activity hours among 36 teachers and 10 classes. This approach aims to balance the needs of students, available resources, and teacher demands, contributing to the improvement of the educational environment of the state tabling school where the study was applied.

Keywords: School Timetabling. New High School System in Paraná. Linear Programming.

1. Introdução

Em instituições de ensino ao redor do mundo, a distribuição eficiente da carga horária das aulas representa um desafio constante, impactando tanto o funcionamento interno quanto

a qualidade do ensino. A busca por equilíbrio entre as necessidades dos estudantes, a disponibilidade de recursos e as demandas dos professores é fundamental para assegurar um ambiente educacional produtivo e saudável para todos os envolvidos.

De acordo com Fonseca et al., (2017), problemas relacionados à programação dos horários escolares envolvem a alocação de horários e recursos, considerando uma variedade de restrições, tanto rígidas quanto flexíveis. A questão do quadro de horários tem sido objeto de estudo desde o final da década de 1950 no trabalho de Tripathy (1984). Nos últimos cinquenta anos, muitas pesquisas foram conduzidas nessa área, resultando em uma ampla variedade de modelos disponíveis (PINEDO, 2016).

Com a implementação do Novo Ensino Médio, a distribuição da carga horária nas instituições de ensino tornou-se um desafio ainda maior. No estado do Paraná, assim como em várias outras regiões do Brasil, o Novo Ensino Médio representa uma mudança significativa no cenário educacional. Tais mudanças incluem a adoção de uma sexta aula no contexto escolar. Para o período noturno, essa sexta aula é oferecida de maneira assíncrona. Esse formato foi adotado para flexibilizar e facilitar o acesso ao conteúdo, permitindo que os alunos acompanhem as aulas em horários mais convenientes, já que muitos deles trabalham durante o dia.

Outro fator que contribui para que a sexta aula seja assíncrona é a limitação do horário disponível para alocação de aulas. No colégio em que o estudo foi aplicado, as aulas iniciam às 18h50 e finalizam às 22h40. Outra limitação está associada ao transporte. Dessa forma, a inclusão de uma sexta aula presencial se tornaria inviável. A sexta aula assíncrona faz parte da estrutura curricular ampliada do novo Ensino Médio, que aumentou a carga horária anual de 800 para 1.000 horas, totalizando 3.000 horas ao longo dos três anos do curso. Ele busca não apenas melhorar a qualidade do ensino, mas também adaptá-lo às exigências e realidades dos estudantes atuais. Nesse contexto, a inclusão de aulas assíncronas no currículo escolar emerge como uma estratégia fundamental. Essas aulas proporcionam maior flexibilidade de acesso ao conteúdo, permitindo que os estudantes gerenciem seu próprio tempo de estudo de forma mais autônoma. Essa abordagem não apenas amplia as oportunidades de aprendizado, mas também atende às diferentes necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos, promovendo uma educação mais inclusiva e acessível. Bates e Sangrà (2011) conduziram uma abrangente revisão da literatura sobre aulas assíncronas, explorando seus benefícios, desafios e melhores práticas.

A adoção de tecnologias na educação proporciona uma significativa personalização da aprendizagem, ampliação do acesso ao conhecimento e estímulo à colaboração e ao aprendizado ativo (SANTOS et. al., 2024). Essas oportunidades são especialmente relevantes no contexto das aulas assíncronas, que permitem uma abordagem mais flexível e individualizada ao ensino, possibilitando que os alunos acessem o conteúdo de acordo com seu próprio ritmo e preferências de aprendizado.

No contexto paranaense, o Novo Ensino Médio traz consigo uma série de inovações, incluindo a flexibilização curricular, a ampliação da carga horária e a diversificação das áreas de conhecimento. Essas mudanças visam oferecer uma formação mais abrangente e personalizada, permitindo que os alunos escolham itinerários formativos alinhados com seus interesses, aptidões e projetos de vida.

No entanto, essa maior flexibilidade curricular também traz desafios significativos para as instituições de ensino, especialmente no que diz respeito à distribuição eficiente da carga horária. Para enfrentar esse desafio, um modelo de programação linear como ferramenta para a distribuição de carga horária faz-se necessário para automatizar o processo e garantir que os requisitos curriculares sejam atendidos de maneira eficiente e equilibrada. O estudo de Fonseca et al., 2017, oferece uma contribuição significativa para a área de

otimização de horários na educação, demonstrando a viabilidade e efetividade da programação linear para solucionar essa complexa questão onde através da formulação de um modelo matemático robusto e flexível, os autores comprovam que essa ferramenta pode auxiliar instituições de ensino a otimizarem a alocação de recursos, como professores, salas de aula e horários, de forma a maximizar a eficiência do processo de ensino-aprendizagem e minimizar custos.

A elaboração de um quadro de horários de aulas ideal é um desafio enfrentado por todas as escolas no Paraná. Atualmente, na escola onde o estudo foi proposto, a distribuição das aulas assíncronas é realizada manualmente. Diante dessa realidade, a aplicação do modelo para resolver esse problema seria altamente benéfica. Ao fornecer uma abordagem sistemática e eficaz para a distribuição da carga horária, esse modelo poderia contribuir significativamente para melhorar o ambiente educacional nesta escola, e potencialmente em todas as escolas que enfrentam desafios semelhantes.

O modelo desenvolvido por (VIEIRA et al., 2024) tem a limitação de que cada professor só pode lecionar uma disciplina. No entanto, no modelo proposto neste trabalho, a base de dados foi elaborada para contornar essa limitação. Isso permite que os professores ministrem diferentes disciplinas, desde que em turmas distintas, aumentando assim a flexibilidade e eficiência na alocação de aulas.

Portanto, o objetivo deste trabalho é aprimorar o modelo proposto por (VIEIRA et al., 2024) para um conjunto de 10 turmas e 36 professores em uma escola da rede pública estadual do Paraná, localizada na região metropolitana de Curitiba. Após a aplicação, será realizada uma avaliação de sua eficácia.

Este artigo está dividido em 6 seções. A primeira, contextualiza o tema geral do trabalho, na seção 2 tem-se a fundamentação teórica do trabalho, seguido da metodologia adotada para se obter o modelo, que é apresentado na seção 4. Na seção 5 são apresentados os resultados e a seção 6 contempla as conclusões do estudo.

2. Fundamentação Teórica

Nesta seção serão apresentados seguintes problemas de programação matemática: problema de programação linear (PL), programação linear inteira mista (PLIM) e programação linear binária (PLB).

2.1 PL

Os modelos de programação linear são um tipo especial de modelos de otimização. Para que um determinado sistema possa ser representado por meio de um modelo de PL, ele deve possuir proporcionalidade, não negatividade, aditividade e separabilidade. Um modelo de PL é um modelo matemático de otimização no qual a função objetivo e as restrições são lineares (de igualdade ou desigualdade) e sua formulação matemática é dada por

Onde:

$$\text{Otimizar } Z = c^T x \quad (1)$$

Sujeito a:

$$Ax \leq b \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad (3)$$

Z é a função objetivo do modelo matemático, que pode ser maximizar ou minimizar, c é o vetor $n \times 1$ de coeficientes da função, x é o vetor $n \times 1$, de variáveis de decisão. A é a matriz $m \times n$, dos coeficientes das restrições e b é o vetor $m \times 1$, de constantes independentes.

A equação 1 se refere a função objetivo do modelo matemático.

A equação de 2 representa as restrições da matriz tecnológica do modelo. Elas descrevem as relações quantitativas entre as variáveis do problema como as proporções em que os recursos são utilizados.

A restrição de não negatividade das variáveis, representada pela equação 3, estipula que todas as variáveis de decisão devem possuir valores que não podem ser negativos.

2.2 PLIM

A programação linear inteira mista é uma extensão da programação linear que permite que algumas ou todas as variáveis de decisão sejam restritas a serem números inteiros, em oposição a valores contínuos. Isso torna o problema mais complexo, pois agora está se otimizando uma função linear sujeita a restrições lineares, mas também precisa levar em conta a natureza discreta das variáveis.

A utilização da programação linear inteira mista é fundamental em diversos problemas do mundo real nos quais as decisões precisam ser tomadas de maneira discreta, como na determinação das quantidades de produtos a serem fabricados, no planejamento de rotas de transporte, na alocação de recursos, entre outros cenários. Em algumas situações, é mais apropriado obter uma solução integral em vez de uma solução fracionária.

O modelo matemático trata de maximizar ou minimizar uma função linear sujeita a um conjunto de restrições lineares, onde algumas ou todas as variáveis de decisão são restritas a serem números inteiros, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Otimizar } Z = c^T x & (4) \\ \text{Sujeito a:} & \end{array}$$

$$Ax \leq b \quad (5)$$

$$x \geq 0 \quad (6)$$

$$x \in Z \quad (7)$$

O modelo de PLIM é análogo ao PL dada pelas equações 4, 5 e 6, com a adição da equação 7, a qual estipula que as variáveis devem pertencer ao conjunto de números inteiros.

2.3 PLB

A Programação Linear Binária (PLB) é uma ferramenta poderosa para otimizar decisões em cenários nos quais as variáveis têm apenas dois valores possíveis, sendo eles 0 ou 1. Essa característica torna a PLB especialmente útil para resolver problemas que envolvem decisões de escolha ou seleção. De forma análoga ao PL dada pelas equações 8, 9 e 10, sua formulação matemática é dada por:

$$\begin{array}{ll} \text{Otimizar } Z = c^T x & (8) \\ \text{Sujeito a:} & \end{array}$$

$$Ax \leq b \quad (9)$$

$$x \geq 0 \quad (10)$$

$$x \in (0,1) \quad (11)$$

A equação 11, garante que as variáveis sejam binárias, no caso $x = 0$ ou $x = 1$.

2.4 Modelos de Programação Linear na Educação

Um eficiente modelo de alocação de carga horária é essencial para assegurar uma gestão escolar eficaz pois facilitam a distribuição dos recursos educacionais, como tempo de aula, sala de aula e corpo docente. Eles permitem que gestores escolares otimizem o uso desses recursos, garantindo sua alocação conforme as necessidades dos alunos e os objetivos da instituição.

Um modelo foi apresentado por (GÓES et al., 2010) sobre otimização na programação de horários de professores e turmas, abordando um modelo matemático com uma abordagem

heurística e um método misto, destacando a importância de encontrar soluções eficientes para esse desafio enfrentado pelas instituições de ensino.

A Programação Linear Inteira Mista (PLIM) tem sido amplamente utilizada na otimização de problemas de alocação de recursos em escolas, como na elaboração de horários de aulas. No estudo conduzido por Rappos et al., 2022, a aplicação da PLIM foi crucial para resolver o problema de elaboração de horários de aulas em uma universidade.

Os modelos de programação linear desempenham um papel significativo na área da educação, fornecendo ferramentas poderosas para resolver uma variedade de problemas relacionados ao planejamento e otimização de recursos em instituições educacionais.

2.5 Legislação Educacional e Políticas Públicas

As diretrizes educacionais visam garantir uma educação de qualidade para todos os estudantes, independentemente de sua classe social, etnia, gênero ou região de origem. A Lei do Novo Ensino Médio (Lei nº 13.415/2017) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) são marcos regulatórios na educação brasileira, estabelecendo parâmetros e diretrizes para a reestruturação do ensino médio em todo o país. No estado do Paraná, essas legislações desempenham um papel crucial na orientação das políticas educacionais estaduais e municipais, influenciando diretamente a realidade educacional dos paranaenses. Entre as diretrizes estabelecidas, destaca-se o aumento da carga horária mínima anual de 800 para 1.000 horas, visando aprofundar o aprendizado e ampliar as oportunidades de formação dos alunos. Uma parte dessas horas é dedicada às aulas assíncronas, uma modalidade educacional complementar que proporciona flexibilidade no processo de aprendizagem, além de enriquecer as atividades presenciais. O Novo Ensino Médio no Paraná foi implementado a partir de 2022. Nesse novo modelo, o Ensino Médio passa a ser composto por dois conjuntos de aprendizagens indissociáveis: a Formação Geral Básica e os Itinerários Formativos. A carga horária de cada série pode ser observada na figura 1.

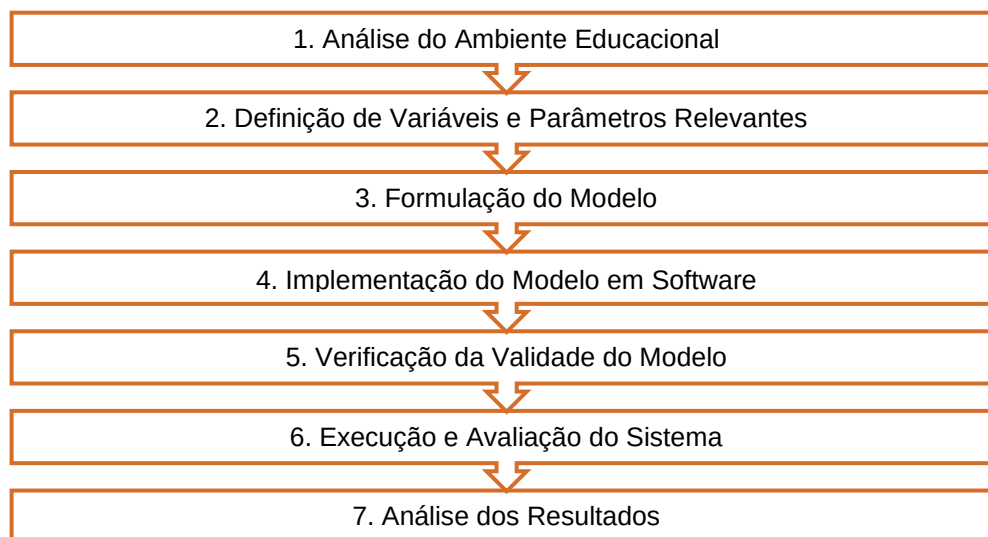
Tabela 1: Distribuição de Carga Horária			
Série do Ensino Médio	1° Série	2° Série	3° Série
Formação Geral Básica	24	18	12
Itinerário Formativo	6	12	18
TOTAL SEMANAL	30	30	30

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

3. Metodologia

Este trabalho é categorizado como um estudo de caso, uma vez que busca criar um modelo matemático de programação linear para a alocação de aulas e implementá-lo em uma escola estadual específica. Todas as fases metodológicas adotadas estão sintetizadas na Figura 1.

Figura 1: Etapas Metodológicas



Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

3.1 Contexto Educacional e Panorama Colégio Estudado

A primeira fase envolveu a compreensão do contexto educacional no estado do Paraná, crucial para desenvolver um modelo relevante e eficaz. Em 2017, foi promulgada a Lei nº 13.415, que implementou a Reforma do Novo Ensino Médio (NEM) em todo o Brasil. O Paraná adotou essa iniciativa nacional e, a partir de 2022, iniciou a implementação gradual do NEM em suas escolas, visando uma formação mais personalizada. O modelo introduz flexibilidade curricular, permitindo que os alunos escolham itinerários formativos alinhados às suas preferências.

O colégio em questão, na região metropolitana de Curitiba, oferece turmas que optam por diferentes áreas do conhecimento, refletindo a proposta de personalização do currículo. No contexto do Novo Ensino Médio, é comum a combinação de aulas presenciais e assíncronas.

Na escola em questão, a distribuição da carga horária para os professores é feita em duas etapas, utilizando um software para alocar cinco aulas presenciais semanais e a segunda fase se trata de realizando manualmente a alocação das cinco aulas assíncronas. Esta abordagem manual pode ser demorada e propensa a erros, afetando a eficiência do processo.

3.2. Identificação de Variáveis e Parâmetros

Após observações e entrevistas no ambiente escolar, foi fundamental identificar as variáveis e parâmetros relevantes do problema. Essa etapa é crucial para compreender os elementos essenciais envolvidos na distribuição das aulas, tanto presenciais quanto assíncronas. Ao identificar corretamente essas variáveis e parâmetros, torna-se possível desenvolver um modelo matemático que represente de forma precisa a complexidade da distribuição da carga horária dos professores.

Durante a análise do problema, foram identificadas várias variáveis e parâmetros cruciais para a modelagem adequada da distribuição da carga horária dos professores. Esses elementos incluem o número total de professores, o número de turmas, a quantidade de dias na semana, o número de horários disponíveis por dia e o peso atribuído ao dia de preferência de não vinculação para cada professor. Além disso, consideramos a carga horária de cada professor em cada turma e a disponibilidade individual de cada professor para lecionar em determinado dia e horário, expressa por meio de variáveis. Esses elementos são essenciais para criar um modelo matemático robusto que capture a

complexidade do processo de alocação das aulas, garantindo eficiência e adequação às necessidades específicas da escola.

3.3 Formulação do Modelo

O modelo proposto é um Problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) de minimização, elaborado para a alocação eficiente de professores em turmas. Ele é abrangente e bem estruturado, com o objetivo de reduzir ao mínimo o número de dias em que os professores devem estar presentes na instituição. As restrições são cuidadosamente definidas para assegurar uma distribuição justa e eficiente das aulas, levando em consideração a disponibilidade dos professores, carga horária das turmas e preferências individuais dos professores em relação aos dias de trabalho.

3.4 Implementação do Modelo

O modelo foi implementado computacionalmente utilizando a linguagem Julia, escolhida devido aos diversos benefícios que oferece. De acordo com (BEZANSON *et al.* 2022), a linguagem Julia pode alcançar um desempenho comparável às linguagens de baixo nível em uma variedade de tarefas, como C e Fortran. Sua capacidade de lidar eficientemente com cálculos numéricos e matemáticos complexos a torna uma escolha ideal para a resolução de problemas de otimização, como o problema de alocação de professores em turmas. Além disso, a integração direta com solucionadores de otimização, como o Gurobi, permite uma implementação simplificada e eficaz do modelo. O Gurobi é um dos solucionadores de otimização mais poderosos e amplamente utilizados, conhecido por sua eficiência e capacidade de lidar com problemas complexos em tempo hábil. A combinação da linguagem Julia com o solucionador Gurobi proporciona uma solução robusta e eficiente para o problema.

3.5 Verificação da Validade do Modelo

O modelo foi elaborado inicialmente utilizando dados simulados e, posteriormente, após a coleta de dados reais, foi testado com esses dados reais. Essa metodologia possibilitou a validação do modelo em um ambiente controlado antes de sua aplicação em situações reais. O uso de dados simulados permitiu ajustes e refinamentos no modelo antes de sua implementação definitiva com dados reais, o que contribuiu para sua eficácia e precisão na alocação de professores em turmas.

3.6 Execução e Avaliação do Sistema

Para simplificar a análise e otimizar a eficiência da implementação, o modelo foi desenvolvido considerando metade das turmas disponíveis, totalizando 9 turmas, especialmente aquelas realizadas no período noturno. Essa estratégia foi adotada para possibilitar uma avaliação mais detalhada e precisa dos resultados obtidos em um contexto específico, tornando mais fácil a compreensão do desempenho do modelo.

3.7 Análise dos Resultados

A etapa de avaliação é crucial para garantir a eficácia e a precisão do modelo desenvolvido. Nesse estágio, os resultados obtidos são minuciosamente examinados e comparados com os objetivos e requisitos estabelecidos anteriormente. Isso possibilita a identificação de possíveis discrepâncias, avalia o desempenho do modelo em diferentes cenários e verifica se as soluções propostas são viáveis e satisfatórias na prática. A avaliação dos resultados também proporciona insights valiosos para eventuais melhorias no modelo, refinando-o e adaptando-o conforme necessário para atender melhor às necessidades específicas do problema em questão.

4. Modelo Matemático para Atribuição de Horários de Aula

O modelo proposto é abrangente e bem estruturado para a alocação de professores em turmas, considerando diversas restrições e objetivos importantes, como a minimização da quantidade de dias de presença na instituição. As restrições são cuidadosamente definidas para garantir uma distribuição justa e eficiente das aulas, levando em conta a disponibilidade dos professores, a carga horária de cada turma e as preferências individuais dos professores quanto aos dias de trabalho.

A referência às diretrizes do Novo Ensino Médio no Paraná valida e contextualiza o modelo, mostrando sua aplicabilidade específica na região. A inclusão das aulas assíncronas para turmas pares e o tratamento das horas de atividades como uma turma separada refletem as particularidades desse novo modelo educacional.

Os professores têm a liberdade de indicar os dias em que preferem não estar presentes na escola, e essa preferência é considerada na alocação das aulas. As diretrizes do Novo Ensino Médio no Paraná estão disponíveis nos documentos oficiais emitidos pela Secretaria de Educação do Estado ou pelo Conselho Estadual de Educação.

Após observação e análise do contexto, o modelo foi delineado de forma a atender às necessidades específicas do Novo Ensino Médio no Paraná.

4.1 Parâmetros

P : Número de professores.

T Número de turmas.

D : Número de dias na semana.

H : Número de horários por dia.

PV : Peso atribuído ao dia de preferência de não vinculação para cada professor.

CH : A carga horária do professor p na turma t .

M : Quantidade máxima de aulas por dia

$Disp$: Indica a disponibilidade do professor p para lecionar no dia d e horário h .

4.2 Conjuntos

$professores = \{1, 2, \dots, P\}$: Conjunto de professores.

$turmas = \{1, 2, \dots, T\}$: Conjunto de turmas.

$dias = \{1, 2, \dots, D\}$: Conjunto de dias.

$horarios = \{1, 2, \dots, H\}$: Conjunto de horários.

4.3 Variáveis de Decisão

x_{ptdh} : Variável binária que indica se o professor p está alocado para a turma t no dia d no horário h .

v_{pd} : Variável binária que indica se o professor p está vinculado ao dia d .

Função Objetivo:

A função objetivo visa minimizar a quantidade de dias em que os professores devem estar presentes na instituição.

Cada vez que uma aula é atribuída a um professor em um determinado dia, o peso correspondente para esse par dia-professor é adicionado à função objetivo.

$$\text{minimizar } \sum_{p=1}^P \sum_{d=1}^D PV.v \quad (12)$$

Restrições:

As seguintes restrições foram formuladas para abordar os pontos específicos do problema:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^H x_{ptdh} \leq v.H \quad \forall p, \forall d \quad (13)$$

A restrição expressa na equação (13) estabelece uma relação entre a alocação das aulas e a preferência do professor quanto aos dias de trabalho. A primeira variável mencionada na função objetivo não é responsável pela distribuição das aulas de forma direta, pois não considera as turmas e horários específicos. Portanto, é essencial estabelecer uma conexão com a variável x_{ptdh} , que representa essa alocação. Essa interligação é crucial para garantir que a distribuição das aulas respeite tanto às preferências individuais dos professores quanto às demandas das turmas e horários disponíveis.

$$\sum_{d=1}^D \sum_{h=1}^H x_{ptdh} = CH \quad \forall p, \forall t \quad (14)$$

A restrição apresentada na equação 14 assegura que toda a carga horária, para todas as turmas, seja distribuída ao longo da semana.

$$\sum_{p=1}^P x_{ptdh} \leq 1 \quad \forall t, \forall d, \forall h \quad (15)$$

É fundamental que, em cada horário específico h , apenas um professor esteja lecionando para cada turma. Essa restrição visa garantir a organização e o controle adequados das aulas, evitando sobreposições e conflitos de horários. A restrição apresentada na equação (15) garante isso.

$$\sum_{t=1}^T \sum_{h=1}^H x_{ptdh} = M \quad \forall p, \forall h \quad (16)$$

A equação (16) expressa a restrição que impõe um limite máximo de 5 aulas por dia para cada professor. Essa limitação é essencial para assegurar uma distribuição equitativa da carga de trabalho entre os educadores.

$$\sum_{t=1}^T x_{ptdh} \leq Disp \quad \forall p, \forall d, \forall h \quad (17)$$

Na equação 17, é representada a restrição relativa à disponibilidade de cada professor. Este aspecto é crucial a ser considerado no processo de alocação de aulas. O parâmetro $Disp$ é uma matriz binária tridimensional que indica a disponibilidade de cada professor em relação a um dia específico e horário determinado.

$$\sum_{p=1}^P x_{ptdh} \leq 1 \quad \text{se } t \text{ é par} \quad \forall d, \forall h \quad (18)$$

Na equação 18, é estabelecida a restrição de que turmas pares, que representam aulas assíncronas, devem ter no máximo uma aula por dia.

$$\sum_{t=1}^T x_{ptdh} \leq 1 \quad \forall p, \forall d, \forall h \quad (19)$$

A última restrição estabelecida pela equação 19 assegura que cada professor

ministre no máximo uma aula em cada horário durante cada dia.

O modelo matemático em questão é definido pela função objetivo apresentada na equação (12) e por todas as restrições apresentadas nas equações numeradas de 13 a 19.

5. Resultados

Para validar a aplicabilidade do modelo, ele foi utilizado para resolver um problema em uma escola da região metropolitana de Curitiba. O cenário envolveu a participação de 36 professores, que lecionam diversas disciplinas, distribuídos em 10 turmas, sendo 4 da 1ª série, 3 da 2ª e 3 da 3ª série. Cada turma possui 25 aulas presenciais e 5 aulas assíncronas por semana.

O modelo considera que um professor pode lecionar várias disciplinas, porém não deve ministrar duas ou mais disciplinas diferentes na mesma turma.

Na Tabela 1, as turmas foram nomeadas de acordo com o seguinte padrão: cada turma tem as aulas presenciais identificadas primeiro, seguidas pelo número subsequente que corresponde às aulas assíncronas. Por exemplo, a turma 1 refere-se às aulas presenciais na 1ª série do ensino médio da turma A, enquanto a turma 2 refere-se às aulas assíncronas na 1ª série do ensino médio da mesma turma. Além disso, a turma número 21 está relacionada à quantidade de horas atividades (HA) que devem ser cumpridas por cada docente. Essa nomenclatura padronizada permite uma identificação clara e organizada das diferentes modalidades de aulas oferecidas em cada série e turma, bem como das HA atribuídas a cada professor, representado por um número na tabela.

Tabela 2: Distribuição de Carga horária por Professor em cada turma

PROF.	TURMAS									
	1 1ª A	2 1ª AC	3 1ª B	4 1ª BC	5 1ª C	6 1ª CC	...	19 3ª C	20 3ª CC	21 HA
1	0	0	0	0	0	0		0	0	0
2	1	1	1	1	1	1		0	0	2
3	2	0	2	0	2	0		0	0	2
4	2	0	2	0	0	0		2	0	3
⋮										
33	0	0	0	0	0	0		2	0	2
34	0	0	0	0	0	0		0	0	4
35	3	0	3	0	3	0		0	0	4
36	2	0	2	0	2	0		0	0	2
Total	25	5	25	5	25	5		25	5	

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Após a aplicação do modelo, conseguimos determinar a alocação de cada professor em horários específicos, incluindo os dias e os períodos de trabalho. Com base nessas informações, foi possível criar os quadros ideais para cada professor, conforme exemplo para um professor, apresentado na Tabela 3.

Tabela 3: Exemplo de Alocação de carga horária para o Prof. 3

Prof. 3	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
Aula 1	HA			1ª C	
Aula 2	1ª B			HA	
Aula 3	1ª D			1ª D	
Aula 4	1ª C			1ª A	
Aula 5	1ª A			1ª B	

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Em relação aos tempos de processamento, o primeiro modelo proposto por Viera et al. (2024), com 7 turmas e 27 professores, obteve a solução ótima em 0,82 segundo. Já o modelo atual, considerando 36 professores e 20 turmas, obteve o valor ótimo em 50,77 segundos.

Comparando tempos de processamento, o primeiro modelo proposto por Paula, com 7 turmas e 27 professores, chegou à solução ótima em 0,82 segundo. Já o modelo atual, considerando 36 professores e 10 turmas, obteve o valor ótimo em 50,77 segundos. O aumento no tempo de processamento entre os dois modelos reflete a crescente complexidade e exigência computacional causada pelo aumento no número de professores e turmas.

6. Conclusão

Os resultados obtidos destacam a eficácia do modelo proposto na otimização da distribuição de carga horária no contexto do Novo Ensino Médio. A capacidade do modelo em alocar de forma eficiente as atividades dos professores, considerando as particularidades das aulas presenciais e assíncronas, evidencia sua viabilidade e importância para a gestão educacional nas instituições de ensino. Portanto, o modelo resultante tem um grande potencial para auxiliar as escolas na organização de seus quadros de horários, promovendo uma distribuição equitativa e eficaz da carga horária dos professores, o que contribui significativamente para a qualidade do ensino oferecido no âmbito do Novo Ensino Médio.

Esses resultados têm o potencial de beneficiar tanto a sociedade quanto a academia de várias maneiras. Ao demonstrar a eficácia do modelo proposto para otimizar a distribuição de carga horária no contexto do Novo Ensino Médio, esta pesquisa oferece contribuições significativas. Primeiramente, uma distribuição eficiente da carga horária dos professores pode resultar em um ambiente educacional mais produtivo e enriquecedor. Ao considerar as particularidades das aulas presenciais e assíncronas, o modelo oferece uma abordagem flexível que se ajusta às necessidades e realidades variadas das escolas e dos alunos. Isso permite uma adaptação mais eficaz a diferentes contextos e cenários educacionais. Por fim, os resultados desta pesquisa podem servir como base para estudos futuros sobre otimização da distribuição de carga horária e gestão educacional, promovendo o avanço do conhecimento acadêmico no campo da educação e abrindo novas oportunidades para pesquisa e desenvolvimento.

Referências

BATES, A. W. , T.; SANGRA, A.. **Managing Technology in Higher Education: Strategies for Transforming Teaching and Learning**. Jossey-Bass higher and adult education series. Edição ilustrada. John Wiley & Sons, 288 p. ISBN 0470584726, 9780470584729, 2011.

BEZANSON, J.; EDELMAN, A.; KARPINSKI, S.; SHAH, V. B. J.: **A Fresh Approach to Numerical Computing**. SIAM Review, v. 59, p. 65–98, 2017. DOI: 10.1137/141000671. Disponível em: < /assets/research/julia-fresh-approach-BEKS.pdf.> Acesso em: 6 set. 2024.

ESCOLA DIGITAL PARANÁ. **Novo Ensino Médio**. Disponível em: <<https://professor.escoladigital.pr.gov.br/nem/>>. Acesso em: 22 abr. 2024.

FONSECA, H.G. , SANTOS, H G., CARRANO, E. G., STIDSEN, T. J.R., Integer programming techniques for educational timetabling, **European Journal of Operational Research**, Elsevier, vol. 262(1), pages 28-39, 2017.

GIL, A. C.. **Como elaborar projetos de pesquisa**: 7. ed. São Paulo: Atlas, 2022.

GÓES, A. R. T., COSTA, Deise M. B. , STEINER, M. T. A. Otimização na programação de horários de professores/turmas: modelo matemático, abordagem heurística e método misto. **Sistemas & Gestão**. v. 5, n. 1. Niterói: Universidade Federal Fluminense, p. 50–66, 2010.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa operacional: curso introdutório**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 356 p. ISBN 9788522110513, 2013.

PINEDO, Michael L. **Scheduling: theory, algorithms, and systems**. 5. ed. Springer, 2016.

RAPPOS, E.s, THIÉMARD, E., ROBERT, S., HÊCHE, J.F.. **A mixed-integer programming approach for solving university course timetabling problems**. Journal of Scheduling, Springer, v. 25, n. 4, p. 391-404, 2022.

SANTOS, H. G., SOUZA, M. J. F. Programação de horários em instituições educacionais: formulações e algoritmos. **Simpósio Brasileiro De Pesquisa Operacional**, 39., 2007, Recife. Recife: SBPO, 2007. p. 2827-2882.

SANTOS, S. M. A. V., OLIVEIRA, D. V.; DANTAS, F. E.; SILVA, G. V.; DEMUNER, J. A.; SILVA, K. A.; SILVA, L. F.; SILVA, M. A. M., Desafios e oportunidades: a adoção de tecnologias na educação e os obstáculos enfrentados pelos professores na Era Digital. **Caderno Pedagógico**, v. 21, e3327, 2024.

TRIPATHY, A.. **School timetabling: a case in large binary integer linear programming**. **Management Science**, v. 30, n. 12, p. 1473-1489, 1984.

VIEIRA, P.F. G.; CONTE, V.C. B.; SIQUEIRA, P.H. Aplicação da programação linear na alocação de aulas: um estudo de caso no Novo Ensino Médio do Paraná. **Caderno Pedagógico**, v. 21, n. 5, e4319, 2024.