

Utilização da programação inteira para determinar o *mix* de produção com matrizes de produção

Marcos Wagner Jesus Servare Junior (Universidade Federal do Espírito Santo) marcoswjunior@gmail.com

Resumo:

Um *mix* de produção é uma importante informação na gestão da produção, devido a questões relativas a atendimento da demanda, disponibilidade de recursos, capacidades e outros fatores. O seu objetivo primordial é realizar o planejamento de produção de acordo com a sua capacidade, quantidade vendida e especificação do produto e, ainda, da maneira mais rápida possível. Para empresas que utilizam padrões de produção, ou matrizes de produção, para recorte de seus produtos, esta combinação se torna ainda mais complexa, uma vez que o corte de uma matriz determina diferentes produtos. Na otimização deste sistema como este é observado diversos possíveis objetivos desse problema como, por exemplo, maximizar a receita da programação, o atendimento da demanda, aproveitamento da capacidade da planta, por exemplo. Esses fatores apontam uma variedade de abordagens sobre o problema e este artigo tem como objetivo apresentar um modelo matemático utilizado para planejar a produção considerando a demanda de cada produto. O resultado obtido foi satisfatório e aponta o ganho otimizado possível com a utilização das informações disponíveis com um modelo de programação inteira.

Palavras chave: Problema de Mix de Produção, Programação Inteira, Matrizes de Produção.

Use of integer programming to determine the production mix with product matrices

Abstract

A product mix is an important information in production management, due to issues related to demand, availability of resources, capabilities and other factors. Its primary objective is to carry out production planning according to its capacity, quantity sold and product specification, and also in the fastest possible way. For companies that use production standards, or production matrices, to trim their products, this combination becomes even more complex, since cutting a matrix determines different products. In the optimization of this system as this is observed several possible objectives of this problem, for example, to maximize the revenue of the programming, the service of the demand, use of the capacity of the plant, for example. These factors point out a variety of approaches to the problem and this article aims to present a mathematical model used to plan the production considering the demand of each product. The result obtained was satisfactory and points out the optimized gain possible with the use of available information with an integer programming model.

Key-words: Product Mix Problem, Integer Programming, Product Matrices.

1. Introdução

Um dos grandes desafios para as empresas são as tomadas de decisões estratégicas relacionadas ao sistema de produção, entre elas está a definição do *mix* de produção e tamanho do lote de cada item e, entre outras, (RODADO *et al.*, 2017) e estas decisões são relevantes tanto para a eficiência da empresa relacionada aos custos envolvidos na produção, bem como o atendimento da demanda dos clientes.

A organização de uma empresa no ponto de vista estratégico deve se comunicar entre os diversos setores da empresa, para que a venda possa indicar a quantidade demandada pelo mercado que o setor produtivo seja capaz de produzir e os diversos setores da empresa possam alimentá-los quanto a abastecimento de matérias-primas, informações e outras características que sejam indispensáveis para o planejamento empresarial.

Dentre as características desejáveis, uma organização deverá ser capaz de oferecer aos seus gestores informações relacionadas ao custo de produção e o portfólio de produtos para que sejam adotados métodos e ferramentas de gestão eficientes para a realidade e visão da empresa (DAL MAGRO *et al.*, 2015).

Para tanto, os gestores deverão ser capazes de determinar em suas escolhas estratégicas a combinação de produtos capazes de otimizar os resultados organizacionais, com intuito de aproveitar a capacidade instalada, os recursos disponíveis e maximizar as receitas da organização (CASSEL *et al.*, 2006).

Um problema de mix de produção consiste na determinação da quantidade que cada um dos produtos escolhidos deverá ser fabricado com a maximização do ganho total, levando em consideração alguns fatores (SOBREIRO; NEGANO, 2013). Essa combinação de produtos deverá estar sujeito a alguns fatores limitantes, tais como matéria-prima, recursos compartilhados e demanda do produto, entre outros.

Linhares (2009) caracteriza o problema de definir o *mix* de produtos como um problema do tipo NP-Completo (do inglês, NP-Hard), no qual o aumento do número de produtos leva a um crescimento exponencial no número de soluções possíveis. Na literatura podem ser encontradas diversas abordagens para o problema.

E ainda, de acordo com Badri *et al.* (2014) muitos pesquisadores propuseram métodos heurísticos para resolver este tipo de problema e, dentre elas, uma abordagem relacionada a Teoria das Restrições (do inglês, Theory of Constraints - TOC) é uma das abordagens mais eficazes.

Uma abordagem de otimização do problema de *mix* de produtos foi utilizada por Aparicio *et al.* (2017) utilizando a análise envoltória de dados (do inglês, *Data Envelopment Analysis* – DEA) para otimizar a eficiência de produção do portfólio.

Por sua vez, Hadidi e Moawad (2017) utilizaram a programação linear para em um estudo de caso na indústria do aço para o problema de *mix* de produtos para um estudo com múltiplas linhas de produção com estágios em sequência.

Outro aspecto citado na literatura e amplamente estudado é a modelagem do *mix* de produção considerando aspectos ambientais, na literatura essa ramificação é conhecida como *Green Product Mix Solution*, conforme descrito por Wellington *et al.* (2014) que indica que o modelo em suas restrições deverá ser capaz de limitar, dentre outros aspectos, a emissão dos gases poluentes.

Além das referências já citadas e suas ramificações, o problema se torna cada vez mais complexo a medida que o portfólio de produtos passa a ser variado e a matéria-prima passa a ser compartilhada, como na indústria de beneficiação de chapas de granito, onde de uma mesma chapa poderá ser extraído diversos produtos diferentes, tais como, pisos, tampos, soleiras, pias, lavabos, entre outros. A combinação entre eles e o maior aproveitamento das chapas vai indicar quanto a sua venda irá contribuir para formação do lucro da empresa.

A programação linear inteira (PLI) é a técnica frequentemente usada para otimizar o *mix* de

produtos, e requer um alto nível de expertise para formulação e, também, para resolvê-lo (TANHAEI; NAVAHANDI, 2013). Embora haja esse requisito quanto a expertise, um modelo matemático quando resolvido aponta a solução ótima para o problema, ou seja, se o modelo for capaz de ser resolvido, sua solução será a melhor combinação de produtos possível no universo de soluções.

Assim, o presente artigo tem como objetivo propor e implementar um modelo matemático de programação linear inteira capaz de solucionar o problema de mix de produção nessa situação específica relacionada ao melhor aproveitamento da chapa, através da determinação da quantidade de cada matriz de produção que será utilizada para atendimento da demanda.

Na Seção 2 será apresentado o contexto em que o modelo será implementado, bem como a descrição das matrizes de produção propostas. Por sua vez, na Seção 3 o modelo matemático será apresentado.

Na Seção 4 os resultados computacionais do modelo matemático de otimização proposto serão apresentados a partir da utilização do software de otimização LINDO para sua resolução e, por fim, na Seção 5 serão realizadas as considerações finais e sugestões de trabalhos futuros.

2. Estudo de Caso

A empresa objeto de estudo está localizada no norte do Espírito Santo, produz pias beneficiadas a partir de chapas de granitos. A empresa comercializa pias nos tamanhos 1,20m, 1,40m, 1,50m, 1,60m, 1,80m e 2,00m, todas essas com 0,55m de largura. Para as pias de 1,80m e 2,00m ainda existe uma opção de pia que tenha dois bojos.

A organização, na tentativa de aproveitar ao máximo a chapa, corta em formato de pisos, de dimensões 29,5cm x 29,5cm, a parte retirada para o encaixe dos bojos. A Tabela 1 mostra a demanda mensal e o preço de venda do piso e de cada tipo de pia produzido pela empresa.

Tabela 1 – Preço e demanda dos produtos

Produto	Piso (m ²)	Pia 1,20m	Pia 1,40m	Pia 1,50m	Pia 1,60m	Pia 1,80m	Pia 2,00m	Pia 1,80m (Dois bojos)	Pia 2,00m (Dois bojos)
Preço (R\$)	35	140	150	160	180	200	230	250	280
Demanda	230	700	575	350	275	300	250	25	25

Para que a empresa possa produzir pia de diversos tamanhos em um mesmo lote a chapa possui algumas alternativas para o recorte. Para a criação das matrizes de corte foi utilizado critérios que atendam aos limites gerados pelas dimensões da chapa tomada como padrão.

As chapas de tamanho padrão possuem 2 metros de altura por 3 metros de largura, dessa região é aproveitado 1,90m na vertical e 2,90m na horizontal, essa retirada de parte da chapa é necessário devido as chapas não possuírem bordas com formas regulares, o que impossibilita a utilização destas partes da chapa.

A partir das exigências foram propostos 8 modelos de matrizes para o corte da chapa em pias, em que neles existem diversas combinações de encaixe de formato de pias na chapa. Na Figura 1 são apresentados os modelos e as pias cortadas a partir deles.

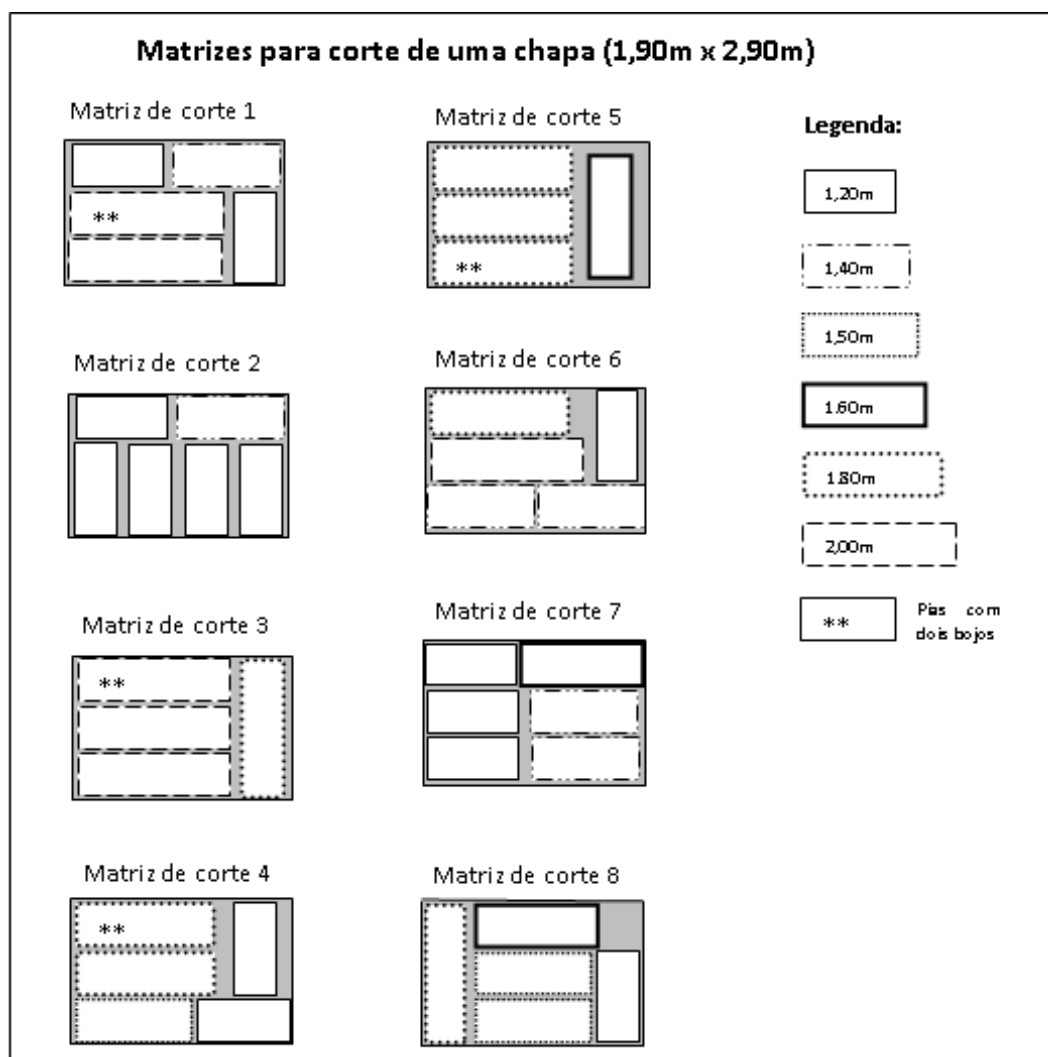


Figura 1: Matrizes de Produção

É desejado encontrar o melhor *mix* de utilização das matrizes de forma que seja máxima a receita com a venda dos produtos. Na tabela 2 vê-se a quantidade de cada produto por matriz e a receita obtida com a venda total dos produtos oriundos de chapas feitas por cada molde proposto.

Tabela 2 – Quantidade de produto e receita por matriz de produção

Produto	Piso (m ²)	Pia 1,20m	Pia 1,40m	Pia 1,50m	Pia 1,60m	Pia 1,80m	Pia 2,00m	Pia 1,80m (Dois bojos)	Pia 2,00m (Dois bojos)	Receita (R\$)
Matriz 1	0,5222	2	1	0	0	0	1	0	1	958,28
Matriz 2	0,5222	5	1	0	0	0	0	0	0	868,28
Matriz 3	0,4351	0	0	0	0	1	2	0	1	955,23
Matriz 4	0,5222	2	0	1	0	1	0	1	0	908,28
Matriz 5	0,4351	0	0	0	1	2	0	1	0	845,23
Matriz 6	0,4351	1	2	0	0	1	1	0	0	885,23
Matriz 7	0,5222	3	2	1	0	0	0	0	0	898,28
Matriz 8	0,5222	1	0	2	1	0	0	1	0	908,28

4. Modelagem Matemática

A seguir será detalhado o modelo matemático para a resolução do problema em questão. Este modelo será usado no software de otimização LINDO, que retornará a melhor combinação de matrizes. O modelo, também, deverá garantir que a produção não exceda a quantidade demandada por cada produto.

Seja x_i a quantidade de vezes que a matriz i será utilizada para o corte das chapas, onde $i \in \{1,2,3,\dots,7,8\}$.

Função objetivo:

Maximizar

$$Z = 958,28 x_1 + 868,28 x_2 + 955,23 x_3 + 908,28 x_4 + 845,23 x_5 + 885,23 x_6 + 898,28 x_7 + 908,28 x_8 \quad (1)$$

Sujeito a:

$$2 x_1 + 5 x_2 + 2 x_4 + 1 x_6 + 3 x_7 + 1 x_8 \leq 700 \quad (2)$$

$$1 x_1 + 1 x_2 + 2 x_6 + 2 x_7 \leq 575 \quad (3)$$

$$1 x_4 + 1 x_7 + 2 x_8 \leq 350 \quad (4)$$

$$1 x_5 + 1 x_8 \leq 275 \quad (5)$$

$$1 x_3 + 1 x_4 + 2 x_5 + 1 x_6 \leq 300 \quad (6)$$

$$1 x_1 + 2 x_3 + 1 x_6 \leq 250 \quad (7)$$

$$1 x_4 + 1 x_5 + 1 x_8 \leq 25 \quad (8)$$

$$1 x_1 + 1 x_3 \leq 25 \quad (9)$$

$$0,52 * x_1 + 0,52 * x_2 + 0,44 * x_3 + 0,52 * x_4 + 0,44 * x_5 + 0,44 * x_6 + 0,52 * x_7 + 0,52 * x_8 \leq 230 \quad (10)$$

$$x_i \geq 0 \forall i \in \{1,2,3,\dots,7,8\} \quad (11)$$

$$x_i \in \text{inteiros} \forall i \in \{1,2,3,\dots,7,8\}. \quad (12)$$

A função objetivo (1) determina a quantidade de receita obtida com a produção e venda dos itens de cada matriz de produção, as restrições de (2) – (9) limitam a quantidade produzida a demanda de cada produto, para Pias de 1,20m, Pias de 1,40m, Pias de 1,50m, Pias de 1,60m, Pias de 1,80m, Pias de 2,00m, Pias de 1,80m e dois bojos, Pias de 2,00m e dois bojos e Pisos, respectivamente.

Por fim, o conjunto de restrições representado em (11) indicam que os valores deverão ser iguais ou superiores a zero e as restrições (12) são restrições referentes a natureza das variáveis de decisão.

5. Experimentos Computacionais e Discussão

O modelo matemático proposto na seção anterior foi aplicado no software de otimização LINDO, como é apresentado na figura 2.

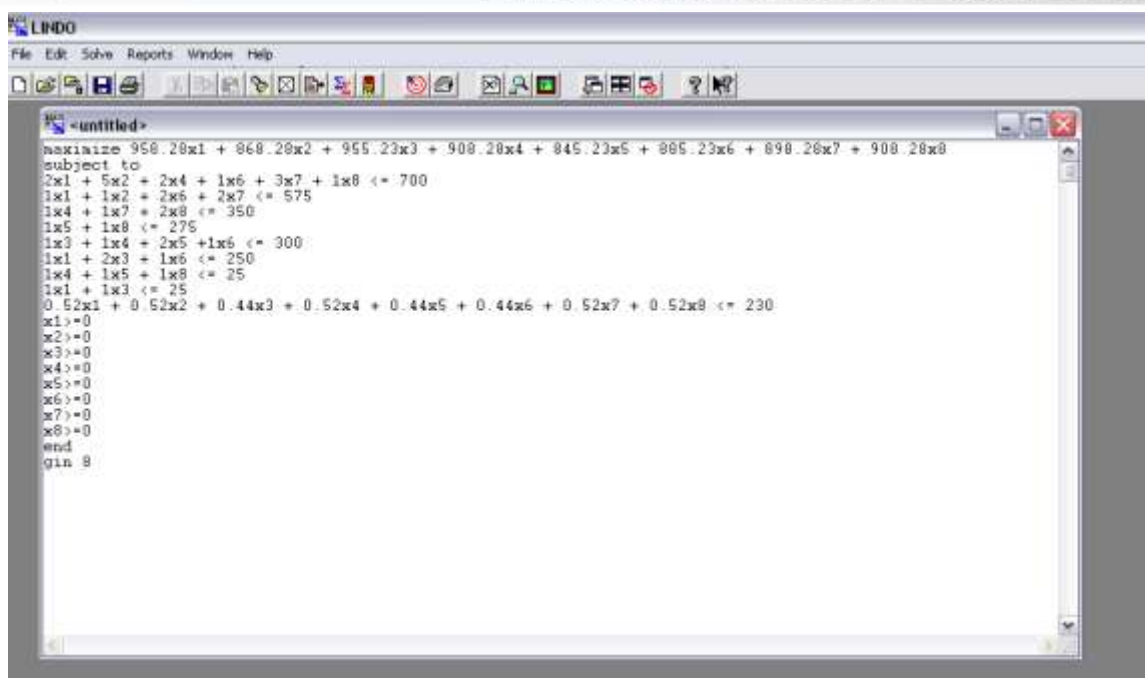
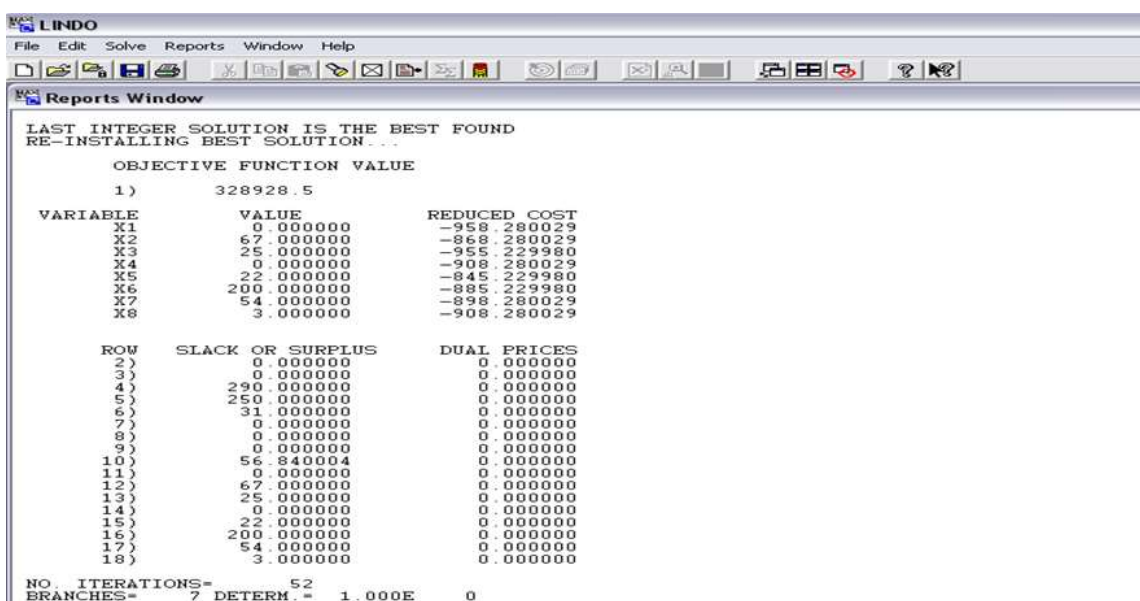


Figura 2: Aplicação da Modelagem Matemática no LINDO

Após a resolução do modelo matemático proposto é obtido os valores de $x_1 = 0$, $x_2 = 67$, $x_3 = 25$, $x_4 = 0$, $x_5 = 22$, $x_6 = 200$, $x_7 = 54$ e $x_8 = 3$, visto na coluna “VALUE”, mostrada na figura 3.



OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1) 328928.5		
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	-958.280029
X2	67.000000	-868.280029
X3	25.000000	-955.229980
X4	0.000000	-908.280029
X5	22.000000	-845.229980
X6	200.000000	-885.229980
X7	54.000000	-898.280029
X8	3.000000	-908.280029

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	290.000000	0.000000
5)	250.000000	0.000000
6)	31.000000	0.000000
7)	0.000000	0.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	56.840004	0.000000
11)	0.000000	0.000000
12)	67.000000	0.000000
13)	25.000000	0.000000
14)	0.000000	0.000000
15)	22.000000	0.000000
16)	200.000000	0.000000
17)	54.000000	0.000000
18)	3.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 52
BRANCHES= 7 DETERM.= 1.000E 0

Figura 3: Solução gerada com a implementação do Modelo Matemático

Na coluna “SLACK OR SURPLUS” é apresentado os valores das variáveis de folga, ou seja, a produção da demanda máxima de alguns tamanhos de pias não precisa ser cumprida para que se tenha a maior receita, dada a combinação das matrizes de produção.

Na figura 3 também se pode observar o valor ótimo da função objetivo em “OBJECTIVE FUNCTION VALUE”, que será a receita de R\$ 328928,50.

Para a análise de sensibilidade será solucionado novos modelos matemáticos, em que será adicionada em cada restrição uma unidade, para que se descubra uma nova combinação com

um novo valor de receita máxima. A diferença entre a receita encontrada nessa alteração no modelo e a receita ótima original será o preço dual para aquela restrição.

No caso da pia de 1,20m que possui demanda de 700 pias, o aumento para 701 acarretará numa nova receita ótima de R\$328991,60. Com diferença de R\$63,10, sendo este o preço dual para as pias de 1,20m. A figura 4 mostra os novos valores de solução do novo modelo, além do novo valor ótimo da função objetivo.

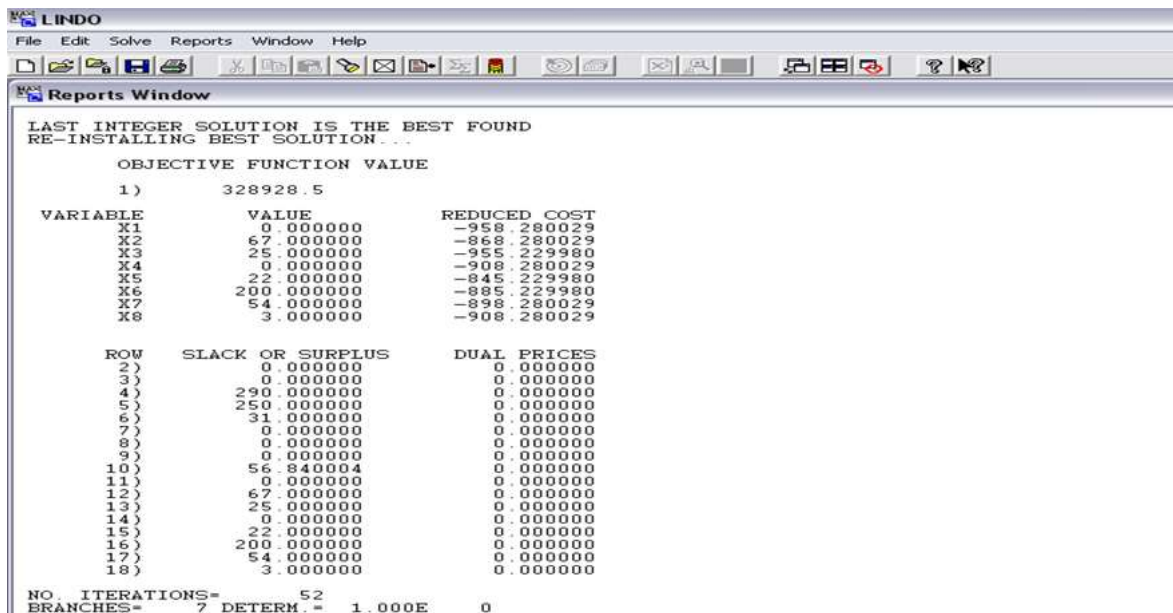


Figura 4: Solução do novo modelo para demanda de 701 pias de 1,20m

Após a repetição do procedimento para as restrições relacionadas aos outros produtos, foi organizada em forma de tabela, a tabela 3, a exposição dos valores de preço dual encontrado.

Tabela 3 – Preço dual

Produto	Piso (m²)	Pia 1,20m	Pia 1,40m	Pia 1,50m	Pia 1,60m	Pia 1,80m	Pia 2,00m	Pia 1,80m (Dois bojos)	Pia 2,00m (Dois bojos)
Demanda	231	701	576	351	276	301	251	26	26
Receita (R\$)	328928,5	328991,6	329084,6	328928,5	328928,5	328928,5	329041,6	329773,8	329260,7
Preço dual (R\$)	0	63,10	156,10	0	0	0	113,10	845,30	332,20

A partir da tabela 3, é visto que o acréscimo de uma unidade na demanda de pias de 1,80m será a mais interessante visto que é a que promove o maior preço dual, com esse aumento.

Na sequência da análise de sensibilidade é feito um acréscimo de R\$1,00 em cada pia para verificar. Na figura 5 é possível ver essa alteração feita no valor dos pisos, agora de R\$ 36,00, que é percebido no valor dos coeficientes da função objetivo, também é notável a mudança nos valores ótimos da receita. No caso em questão não houve alteração do mix de utilização das matrizes de produção, ou seja, as variáveis.

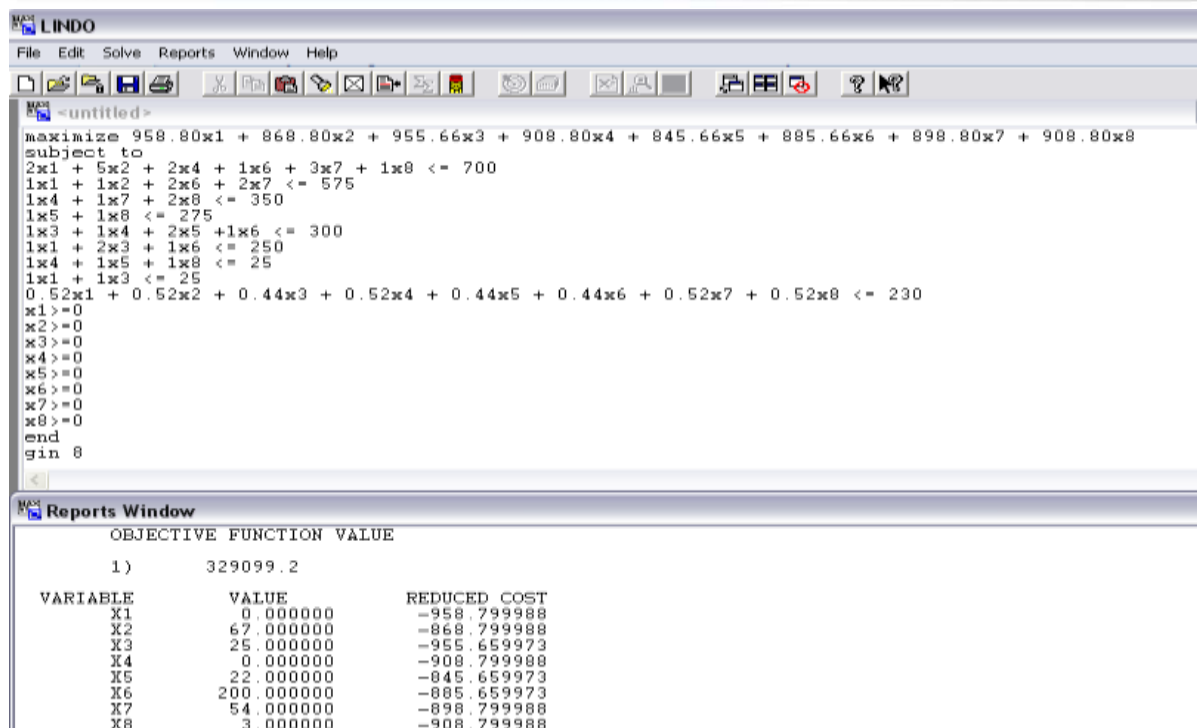


Figura 5: Solução do modelo para um novo preço do piso ajustado para R\$36,00

Como observado na tabela 4, o produto que melhor justifica este acréscimo em seu preço será a pia de 1,20m, pois apresenta um maior aumento na receita. O que é de lógico, pois é o produto com maior demanda, e a variação será igual a quantidade produzida. Para todos os produtos, o incremento de R\$1,00 não alterou o mix de utilização das chapas.

Tabela 4 - Variação na receita com a alteração de R\$1,00 nos produtos

Produto	Piso (m²)	Pia 1,20m	Pia 1,40m	Pia 1,50m	Pia 1,60m	Pia 1,80m	Pia 2,00m	Pia 1,80m (Dois bojos)	Pia 2,00m (Dois bojos)
Preço (R\$)	36	141	151	161	181	201	231	251	281
Receita (R\$)	329099,2	329628,5	329503,5	328988,5	328953,5	329197,5	329178,5	328953,5	328953,5
Diferença (R\$)	170,7	700	575	60	25	269	250	25	25

5. Considerações Finais

Como vimos, este trabalho é resultado de um estudo de caso, que exigiu no decorrer do mesmo uma análise e reflexão das respostas encontradas. O modelo matemático foi capaz de descrever o problema, e propor soluções e uma releitura do *mix* de produção na empresa, com informações reais e direcionadas a melhoria do processo produtivo e atendimento do mercado.

Deste estudo se pôde tirar algumas conclusões a respeito da utilização das matrizes, conclusões estas a respeito da quantidade de vezes que cada uma será utilizada, um possível reajuste no

preço em um produto e o produto que deve receber investimentos para aumento da demanda que acarretará em um aumento na receita.

Uma observação importante é de que com essas matrizes de produção não será possível um atendimento total da demanda sem que seja produzida uma quantidade de pias que não foram vendidas. Uma forma que possa melhorar este aspecto é que sejam disponibilizadas mais matrizes de produção, que possam incluir outras combinações de pias em uma chapa e assim aproximar a produção da demanda.

Outras abordagens e trabalhos futuros poderão ser realizados com a inclusão de novas restrições relativas ao atendimento da demanda, inclusão de políticas de estoques, modelos capacitados, interação entre os *stakeholders* e seus fluxos, novos objetivos e técnicas de solução, como heurísticas e metaheurísticas.

Referências

- APARICIO, J. et al.** *Evaluating productive performance: A new approach based on the product-mix problem consistent with Data Envelopment Analysis*. Omega, v. 67, p. 134-144, 2017.
- BADRI, S et al..** *An integrated model for product mix problem and scheduling considering overlapped operations*. Decision Science Letters, v. 3, n. 4, p. 523-534, 2014.
- CASSEL, R. A. et al.** *Maximização da lucratividade em produção conjunta: um caso na indústria frigorífica*. Produção, v. 16, n. 2, p. 244-257, 2006.
- DAL MAGRO, C. B. et al.** *Análise do mix de produção para maximização da lucratividade em produção conjunta: um caso na indústria de lácteos*. In: Anais do Congresso Brasileiro de Custos-ABC. 2015.
- HADIDI, L. A.; MOAWAD, O. A.** *The product-mix problem for multiple production lines in sequenced stages: a case study in the steel industry*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 88, n. 5-8, p. 1495-1504, 2017.
- LINHARES, A.** *Theory of constraints and the combinatorial complexity of the product-mix decision*. International Journal of Production Economics, v. 121, n. 1, p. 121-129, 2009.
- RODADO N. D. et al.** *A mathematical model for the product mixing and lot-sizing problem by considering stochastic demand*. International Journal of Industrial Engineering Computations, v. 8, p. 237-250, 2017.
- SOBREIRO, V. A.; NAGANO, M. S.** *Proposta de uma heurística construtiva baseada na TOC para definição de mix de produção*. Produção, v. 23, n. 3, p. 468-477, 2013.
- TANHAEL, F.; NAHAVANDI, N.** *Algorithm for solving product mix problem in two-constraint resources environment*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 64, n. 5-8, p. 1161-1167, 2013.
- WELLINGTON, J. F. et al.** *Interior analysis of the green product mix solution*. European Journal of Operational Research, v. 237, n. 3, p. 966-974, 2014.