

Formulação Matemática Para o Problema de Roteamento em Arcos Capacitados com Janelas de Tempo e Tempo Máximo de Espera

Diego Venâncio Thomaz (Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização (GTAO) / Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)) dythomaz@utfpr.edu.br

Gustavo Valentim Loch (Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização (GTAO) / Universidade Federal do Paraná (UFPR)) gustavo.gvalentim@gmail.com

Cassius Tadeu Scarpin (Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização (GTAO) / Universidade Federal do Paraná (UFPR)) cassiusts@gmail.com

Tatiane Tambarussi / Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) tambarussi@utfpr.edu.br

Resumo:

O Problema de Roteamento em Arcos Capacitados com Janelas de Tempo (PRACJT) clássico consiste em determinar um conjunto de rotas de custo mínimo em que uma frota de veículos deve partir do depósito, iniciar o atendimento das arestas requeridas dentro das janelas de tempo pré-estabelecida e retornar ao depósito. Este trabalho propõe um tratamento especial para o PRACJT, considerando um tempo máximo de espera entre dois atendimentos consecutivos, diferentemente dos trabalhos apresentados na literatura que consideram tempo de espera ilimitado. A formulação matemática aqui proposta foi validada e testada sobre instâncias com até 60 nós, 90 arestas e 45 arestas requeridas para um problema de coleta de lixo.

Palavras chave: Roteamento em Arcos, Janelas de Tempo, Tempo Máximo de Espera.

Mathematical Formulation For The Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows and Maximum Wait Time

Abstract

The classic Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows (CARPTW) consists in determining a set of routes of minimal cost in which a fleet of vehicles must leave the depot, start the visit of the required edges within the time windows pre-established and returns to the depot. This paper proposes a special treatment to CARPTW, considering a maximum wait time between two consecutive visits, differently the papers presented in literature that considerer unlimited wait time. The mathematical formulation proposed here was validated and tested in instances with up to 60 nodes, 90 edges and 45 required edges for a waste collection problem.

Key-words: Arc Routing, Time Windows, Maximum Wait Time.

1. Introdução

Os *Arc Routing Problems* (ARPs – Problemas de Roteamento em Arcos) são oriundos do problema das Pontes de Königsberg resolvido por Euler e, em geral, consistem em determinar uma ou mais rotas para a realização de serviços sobre algumas ou todas as arestas ou arcos (representantes das ruas de uma cidade, por exemplo) de um grafo. Algumas aplicações reais

que podem ser modeladas desta forma: coleta ou entrega de mercadorias, distribuição de correspondências, manutenção de rede, remoção de neve, coleta de lixo, entre outras. O aumento do número de aplicações reais é proporcional ao número de problemas cada vez mais gerais e difíceis (CORBERÁN; PRINS, 2010).

O *Chinese Postman Problem* (CPP – Problema do Carteiro Chinês) foi proposto por Meigu Guan (1962) e é um clássico ARP. O problema consiste em determinar uma rota com o menor custo possível (distância), em que um carteiro deve partir de um depósito, atravessar todas as ruas, ao menos uma vez, para realizar as entregas e retornar ao depósito (SUN; MENG; TAN, 2015). O *Rural Postman Problem* (RPP – Problema do Carteiro Rural) é semelhante ao CPP, em que apenas um subconjunto de ruas deve ser atendido (representado pelas arestas requeridas).

O *Capacitated Arc Routing Problem* (CARP – Problema de Roteamento em Arcos Capacitados) foi proposto por Golden e Wong (1981). O objetivo consiste em determinar um conjunto de rotas de custo mínimo, em que uma frota de veículos de capacidade de carga finita deve partir de um depósito, realizar os atendimentos sobre as arestas requeridas, sem que a capacidade máxima de carga dos veículos seja excedida, e retornar ao depósito. Sua complexidade computacional é *NP-Hard* (GOLDEN; WONG, 1981). O CARP pode também ser encontrado na literatura como *Capacitated Rural Postman Problem* (CRPP – Problema do Carteiro Rural Capacitado), como sugerido por Mullaseril (1996).

O *Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows* (CARPTW – Problema de Roteamento em Arcos Capacitados com Janelas de Tempo) é uma das variantes do CARP, em que o atendimento sobre cada uma das arestas requeridas deve se iniciar dentro de uma janela de tempo pré-estabelecida. O CARPTW é ainda mais difícil de ser resolvido devido à restrição de horário de atendimento que pode ser igual, ou não, em cada uma das arestas requeridas, o que aumenta a complexidade computacional para resolução.

No que se trata do CARPTW são poucos os trabalhos na literatura que propõem formulações matemáticas, é maior o número de trabalhos com propostas de estratégias de resoluções heurísticas. Algumas publicações que apresentaram formulações matemáticas e algoritmos heurísticos:

Mullaseril (1996) apresenta uma formulação matemática para o CRPP com janelas de tempo (CRPPTW) e uma estratégia de resolução baseada em um algoritmo de varredura de caminhos (*Path Scanning*). O CRPPTW não deixa de ser um CARPTW. A aplicação real do problema é a distribuição de alimentos em uma fazenda de gado, uma espécie de confinamento.

Ramdane-Cherif (2006) propõe um algoritmo memético como estratégia de resolução para o CARPTW. A aplicação real do problema está associada ao problema da coleta de lixo.

Tagmouti *et al.* (2007) propõem uma formulação matemática para o CARP com custo de serviço dependente do tempo, ou seja, o custo de travessia de uma aresta depende do horário de início do atendimento. Os autores apresentam também uma estratégia de resolução baseada em um esquema de geração de colunas. A aplicação real do problema está associada a operações de espalhamento em estradas congeladas.

Johnson e Wohlk (2009) propõem uma estratégia de resolução para o CARPTW usando geração de colunas. A aplicação real do problema está associada a operações de espalhamento em estradas congeladas.

Murat Afsar (2010) propõe um método de geração de colunas como estratégia de resolução para o CARP com janelas de tempo flexíveis. A aplicação real do problema é associada ao problema da coleta de lixo.

Tagmouti *et al.* (2011) propõem uma estratégia de resolução para o CARP dinâmico com custo de serviço dependente do tempo baseada na heurística de descida em vizinhança variável. A aplicação real do problema está associada a operações de espalhamento em estradas congeladas.

A Tabela 1 expõe uma síntese de como são consideradas as janelas de tempo nas publicações citadas. Em ordem as colunas apresentadas indicam o problema tratado, os autores, a característica da janela de tempo, se é possível o veículo esperar a abertura de uma janela de tempo e o tipo da frota.

Problema	Autores	Característica das Janelas de Tempo	Tempo de Espera	Frota
CRPPTW	Mullaseril (1996)	Inflexível	Ilimitado	Heterogênea
CARP com custo de serviço dependente de horário	Tagmouti <i>et al.</i> (2007)	Flexível	Não há	Homogênea
CARPTW	Ramdane-Cherif (2006)	Flexível	Ilimitado	Homogênea
CARPTW	Johnson e Wohlk (2009)	Inflexível	Não há	Homogênea
CARP com janelas de tempo flexíveis	Murat Afsar (2010)	Flexível	Não há	Homogênea
CARP dinâmico com custo de serviço dependente de horário	Tagmouti <i>et al.</i> (2011)	Flexível	Não há	Homogênea

Fonte: O Autor (2018)

Tabela 1 – Síntese dos CARPTW

No geral, os trabalhos apresentados consideram dois tipos de janelas de tempo: as flexíveis e as inflexíveis. Os problemas com janelas de tempo flexíveis permitem que os atendimentos sejam realizados fora das janelas de tempo (com as devidas penalizações). Já aqueles que consideram janelas de tempo inflexíveis não possibilitam a realização dos atendimentos fora das janelas de tempo. Alguns trabalhos consideram ser possível esperar, por tempo ilimitado, a abertura de uma janela de tempo entre dois atendimentos consecutivos, ou seja, caso os veículos cheguem com antecedência ao horário de abertura da janela de tempo, estes poderão aguardar o tempo que for necessário. Além disso, são consideradas as frotas homogêneas (todos os veículos possuem a mesma capacidade de carga) e as frotas heterogêneas (os veículos podem possuir distintas capacidades de carga).

Ainda existe espaço para novas pesquisas sobre os problemas capacitados. Por exemplo, considerar grafos mais complexos e restrições adicionais como: janelas de tempo, entregas fracionadas, múltiplos depósitos (CORBERÁN; PRINS, 2010). O presente trabalho propõe uma formulação matemática para o CARPTW com tempo máximo de espera (tempo de espera limitado). É inspirado nas publicações de Mullaseril (1996) e Ramdane-Cherif (2008). A maior diferença entre estas abordagens e a presente proposta está no fato de que aqui o tempo de espera é limitado, ou seja, os veículos podem aguardar, no máximo durante um tempo pré-estabelecido, a abertura de uma janela de tempo, diferentemente das abordagens de

Mullaseril (1996) e Ramdane-Cherif (2008), nas quais o tempo de espera é ilimitado.

Uma possível aplicação real do problema aqui tratado está associada ao problema da coleta de lixo, pois este é um serviço que muitas vezes não pode ser realizado em qualquer horário do dia. Em geral, o horário de atendimento particular é uma exigência sobre ruas localizadas em regiões comerciais ou centrais de uma cidade, nas quais os resíduos produzidos precisam ser coletados fora do horário comercial.

A originalidade deste trabalho está no tratamento do tempo de espera. Em situações reais é comum considerar o tempo de espera entre dois atendimentos consecutivos. No caso da coleta de lixo, o veículo parado durante muito tempo em uma rua com residências pode causar reclamações em função do odor de resíduos. Logo, se faz necessário o tempo de espera limitado.

2. Descrição e Análise do Problema

Para ilustrar o problema CARPTW com tempo de espera limitado e suas características, apresenta-se um exemplo didático como meio facilitador para compreensão. Sejam, então, as arestas (i, j) do grafo apresentado na Figura 1 a ilustração das ruas, e os nós i os cruzamentos entre elas. São apresentados dois tipos de arestas: as arestas cujo atendimento único deve ser iniciado dentro da respectiva janela de tempo (arestas requeridas) e as arestas que são utilizadas apenas para passagem dos veículos. O ternário $(c_{ij}, TP_{ij}, Q_{ij})$ sobre cada uma das arestas (i, j) apresenta o custo de travessia (c_{ij} a distância), o tempo de passagem (TP_{ij} em horas) e a demanda (Q_{ij} em quilogramas) que deve ser coletada. As arestas $(0,1)$ e $(1,2)$ apresentam demanda nula, pois são utilizadas apenas para passagem do veículo. Neste trabalho, tem-se que c_{ij} e TP_{ij} são fixos para cada uma das arestas (i, j) , ou seja, independentemente de possíveis atendimentos. O atendimento na aresta (i, j) deve ser iniciado dentro da janela de tempo $[a_{ij}, b_{ij}]$, ou seja, deve se iniciar no mínimo no instante a_{ij} e no máximo no instante b_{ij} .

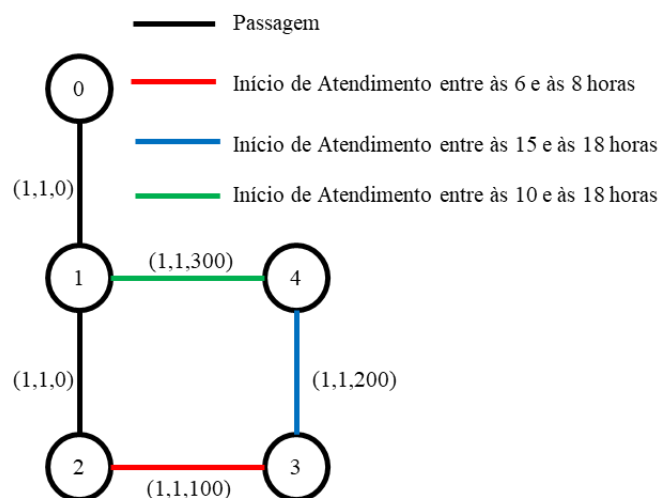


Figura 1 – Arestas requeridas, demandas e janelas de tempo

O problema consiste em determinar, para o período de um único dia, um conjunto de rotas de custo mínimo em que uma frota heterogênea de V veículos limitados a uma capacidade de carga individual W_v deve partir de um depósito, representado pelo nó “0”, coletar as demandas de lixo de acordo com as exigências de janelas de tempo e retornar ao depósito. A capacidade de carga individual dos veículos (W_v) não pode ser ultrapassada durante os atendimentos. O atendimento de uma aresta (i, j) é único, sua demanda Q_{ij} deve ser coletada por apenas um veículo v e em um único sentido. Embora, os atendimentos devam se iniciar dentro das janelas de tempo $[a_{ij}, b_{ij}]$, os veículos podem se deslocar pelas arestas em qualquer horário do dia. Além disso, uma particularidade do problema aqui tratado é a possibilidade dos veículos aguardarem, mesmo que por um tempo pré-estabelecido, a abertura das janelas de tempo de arestas seguintes.

A Tabela 2 apresenta algumas soluções para o problema ilustrado na Figura 1, de acordo com o tempo máximo de espera pré-estabelecido e considerando um único veículo na rota. Em ordem as colunas apresentadas indicam o tempo máximo de espera considerado, a rota que representa a solução ótima do problema e o custo total das travessias.

Tempo Máximo de Espera (em horas)	Rota	Custo
0	Infactível	-
1	$0 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 0$ 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	10
2	$0 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 0$ 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	10
3	$0 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 0$ 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	10
4	$0 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 0$ 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	10
5	$0 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 0$ 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	8
6	$0 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 0$ 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	6
Ilimitado	$0 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 0$ 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18	6

Fonte: O Autor (2018)

Tabela 3 – Soluções do Problema Ilustrado na Figura 1

Nas rotas apresentadas na Tabela 2, $i \rightarrow j$ ilustra a travessia do veículo na aresta (i, j) do nó i para o nó j . O número abaixo de cada um dos nós i indica o horário de saída do veículo do nó inicial da aresta. Além disso, a letra S sobre algumas arestas simboliza a realização do atendimento (serviço) e o número abaixo de algumas arestas representam o tempo de espera sobre a respectiva aresta. A Tabela 2 mostra que o tempo máximo de espera pré-estabelecido altera a característica do CARPTW clássico (tempo de espera ilimitado) e contribui no custo total das travessias.

3. Formulação Matemática

Pode-se observar em cada uma das rotas apresentadas na Tabela 2 que alguns nós aparecem diversas vezes, pois há arestas que são atravessadas mais que uma vez e nós que são iniciais de diferentes arestas. Logo, a representação do problema por meio de um grafo não direcionado (Figura 1) traz algumas complicações no processo de modelagem, pois o horário de entrada do veículo em uma aresta está associado ao nó inicial desta aresta, entretanto se um mesmo nó for inicial de mais de uma aresta serão a ele serão associados diferentes horários. Uma forma de contornar esta situação é gerar nós artificiais para que os diferentes horários de entrada do veículo nas arestas sejam associados a nós distintos. Mullaseril (1996) propõe uma transformação do problema original em um problema equivalente de roteamento em nós, utilizando-se apenas das arestas requeridas para associar o horário de entrada do veículo nas arestas. O único atendimento sobre uma aresta requerida garante que seja associado a ela apenas um horário de atendimento. A Figura 2 apresenta o grafo completo que representa a transformação do grafo não direcionado (Figura 1).

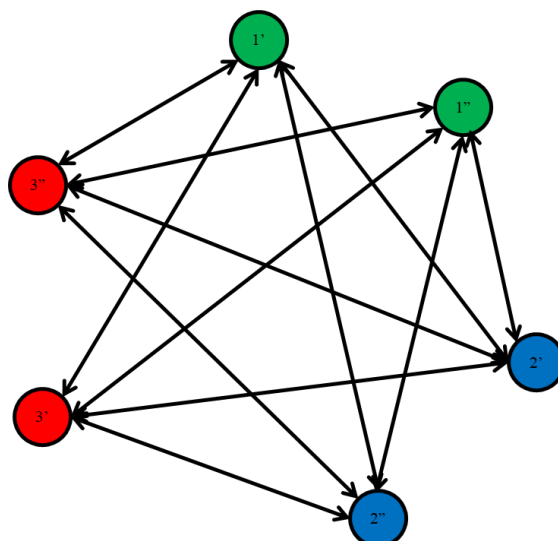


Figura 2 – Grafo transformado

Os nós i do grafo completo representam os sentidos contrários de travessia das arestas requeridas do problema original. Os nós $1'$, $1''$, $2'$, $2''$, $3'$ e $3''$ representam os arcos do problema original $[1,4]$, $[4,1]$, $[4,3]$, $[3,4]$, $[3,2]$ e $[2,3]$, respectivamente. Um arco $[i, j]$ do grafo completo representa no problema original a travessia do respectivo arco i , e implicitamente, o caminho de custo mínimo saindo do nó final do arco i até o nó inicial do arco j . Desta forma, o problema de roteamento em arcos é transformado em uma espécie de problema de roteamento em nós, em que o atendimento de uma aresta requerida do problema original é representado por meio do atendimento de um dos dois nós que representam os sentidos contrários de travessia da aresta requerida.

A publicação de Mullaseril (1996) propõe uma formulação matemática para o CRPPTW com tempo de espera ilimitado e modela esta característica por meio do seguinte conjunto de restrições:

$$s_{iv} + TP_{ij} - M(1 - x_{ijv}) \leq s_{jv} \quad \forall i \in R, j \in R \setminus \{0\}, v = 1, \dots, V. \quad (1)$$

O conjunto de restrições (1) é utilizado para cronometrar o horário que os veículos partem dos

nós atendidos. Se o veículo v realizar o atendimento do nó i antes do nó j tem-se $x_{ijv} = 1$, logo $M(1 - x_{ijv}) = 0$ e $s_{iv} + TP_{ij} \leq s_{jv}$, ou seja, o horário de partida do veículo v do nó j deve ser após o horário de partida do nó i somado ao tempo de passagem sobre o arco $[i, j]$. Neste caso, o tempo de espera é como uma variável de folga e é possível esperar o tempo que for necessário para o atendimento do nó j . Se $x_{ijv} = 0$, o conjunto de restrições sempre é satisfeito, pois M é uma constante de grande valor. Para cronometrar o horário de saída dos veículos dos nós são propostos neste trabalho os conjuntos de restrições (2), (3) e (4) ao invés de (1).

$$s_{iv} + TP_{ij} + t_{ijv} - M(1 - x_{ijv}) \leq s_{jv} \quad i \in X' \cup \{0\}, j \in X', v = 1, \dots, V \quad (2)$$

$$s_{iv} + TP_{ij} + t_{ijv} + M(1 - x_{ijv}) \geq s_{jv} \quad i \in X' \cup \{0\}, j \in X', v = 1, \dots, V \quad (3)$$

$$t_{ijv} \leq T_{\max} \quad \forall i \in X', j \in X', v = 1, \dots, V \quad (4)$$

Estes conjuntos de restrições possibilitam o controle do tempo de espera entre dois atendimentos consecutivos, pois se o veículo v realizar o atendimento do nó i antes do nó j tem-se $x_{ijv} = 1$, logo $M(1 - x_{ijv}) = 0$ e $s_{iv} + TP_{ij} + t_{ijv} = s_{jv}$, ou seja, o horário de partida do veículo v do nó j é igual ao horário de saída do veículo v do nó i somado ao tempo de passagem sobre o arco $[i, j]$ mais o tempo de espera entre os atendimentos consecutivos dos nós i e j . Se $x_{ijv} = 0$, os conjuntos de restrições são satisfeitos, pois é uma constante de grande valor. O tempo máximo que os veículos podem esperar entre dois atendimentos consecutivos é garantido pelo conjunto de restrições (4).

Para a formulação matemática, considera-se um grafo $G = (X, E, A)$, em que X é o conjunto de n nós, E é um conjunto de m arestas e A é um conjunto de $2m$ arcos. O subconjunto $R \subseteq E$ é o conjunto de r arestas requeridas, ou seja, aquelas que devem ser atendidas. A partir do grafo original é criado o grafo completo $G' = (X', E')$, em que X' é o conjunto de n' nós e E' é um conjunto de m' arcos que conectam cada um dos nós $i \in X'$ e $j \in X'$ que não representam a mesma aresta requerida. Para cada aresta requerida $e \in R$ define-se o conjunto $N(e) = \{e', e''\} \subseteq X'$. O atendimento de uma aresta requerida $e \in R$ do problema original é representado por meio do atendimento de um dos nós $i \in N(e)$. Os arcos $[i, j] \in E'$ representam no problema original a travessia do arco $i \in G$ e implicitamente o caminho de custo mínimo saindo do nó final do arco $i \in G$ até o nó inicial do arco $j \in G$. O nó "0" é o depósito que contém uma frota heterogênea de V veículos limitados a uma capacidade de carga individual W_v . TP_{ij} é o tempo de passagem sobre o arco $[i, j] \in E'$, ou no problema original, o tempo que o veículo leva para percorrer o arco $i \in G$ e o caminho de custo mínimo saindo do nó final do arco $i \in G$ até o nó inicial do arco $j \in G$. c_{ij} é o custo de travessia da aresta $[i, j] \in E'$, ou no problema original, o custo de percorrer o arco $i \in G$ e o caminho de custo mínimo saindo do nó final do arco $i \in G$ até o nó inicial do arco $j \in G$. O intervalo $[a_e, b_e]$ é a janela de tempo para que o atendimento da aresta requerida $e \in R$ seja iniciado (ou no novo problema, a janela de tempo para início do atendimento de um dos nós

$N(e) = \{e', e''\} \subseteq X'$. $T_{\max}$ é o tempo máximo de espera entre dois atendimentos consecutivos. Um nó $i \in N(e)$ atendido possui a mesma demanda Q_e e janela de tempo que a respectiva aresta requerida $e \in R$ do problema original.

As variáveis de decisão do modelo $x_{ijv} = 1$ se o veículo v atende o nó $i \in X'$ antes do nó $j \in X'$, s_{iv} é o horário que o veículo v atende o nó $i \in X'$ e t_{ijv} é o tempo que o veículo v espera a abertura da janela de tempo do nó $j \in X'$ após o atendimento do nó $i \in X'$. O problema é então formulado da seguinte forma:

$$\min z = \sum_{[i,j] \in E'} \sum_{v=1}^V c_{ij} \cdot x_{ijv} \quad (5)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{[i,j] \in E'} x_{ijv} = \sum_{[j,i] \in E'} x_{jiv} \quad v=1, \dots, V, \forall i \in X' \quad (6)$$

$$\sum_{[i,j] \in E'} \sum_{v=1}^V x_{ijv} \leq 1 \quad v=1, \dots, V, \forall h \in R, i \in N(h) \quad (7)$$

$$\sum_{h \in R} Q_h \cdot x_{ijv} \leq W_v \quad i \in N(h), j \in X', [i, j] \in E', v=1, \dots, V \quad (8)$$

$$\sum_{j \in X'} x_{0jv} \leq 1 \quad v=1, \dots, V \quad (9)$$

$$\sum_{i \in X'} x_{iov} \leq 1 \quad v=1, \dots, V \quad (10)$$

$$s_{iv} + TP_{ij} + t_{ijv} - M(1 - x_{ijv}) \leq s_{jv} \quad i \in X' \cup \{0\}, j \in X', v=1, \dots, V \quad (2)$$

$$s_{iv} + TP_{ij} + t_{ijv} + M(1 - x_{ijv}) \geq s_{jv} \quad i \in X' \cup \{0\}, j \in X', v=1, \dots, V \quad (3)$$

$$a_i \leq s_{iv} \leq b_i \quad \forall h \in R, i \in N(h), v=1, \dots, V \quad (11)$$

$$t_{ijv} \leq T_{\max} \quad \forall i \in X', j \in X', v=1, \dots, V \quad (4)$$

$$x_{ijv} \in \{0, 1\} \quad \forall [i, j] \in E', v=1, \dots, V \quad (12)$$

$$t_{ijv}, s_{iv} \in R^+ \quad \forall i \in X' \cup \{0\}, j \in X', v=1, \dots, V \quad (13)$$

A função (5) minimiza o custo total das travessias. O conjunto de restrições (6) garante a conservação de fluxo dos veículos ao longo do trajeto. O atendimento sobre a aresta $h \in R$ só deve ser realizado por um único veículo e em um único sentido, fato garantido pelo conjunto de restrições (7). O conjunto de restrições (8) garante que a capacidade máxima de carga W_v do veículo v não seja ultrapassada. Os conjuntos de restrições (9) e (10) são utilizados para inserir o depósito nas rotas e garantem que todo trajeto deve iniciar e terminar no depósito. A incumbência dos conjuntos de restrições (2), (3) e (4) é mesma descrita anteriormente. $M = m \cdot r + 1$ é uma constante de grande valor. O conjunto de restrições (11) garante que o horário de atendimento da aresta requerida $h \in R$ deve ser iniciado dentro da janela de tempo

$[a_i, b_i]$, em que $i \in N(h)$. Os conjuntos de restrições (12) e (13) garantem que a variável x_{ijv} é binária e, t_{ijv} e s_{iv} são reais, respectivamente.

4. Testes e Resultados

A Tabela 3 apresenta as propriedades dos problemas utilizados para validar e testar a formulação (2)-(13).

Problema	n	m	r	V	$T_{\max}$
TW-A10A98	10	15	8	1	Ilimitado
TW-A13A89	13	23	12	1	Ilimitado
TW-A13C69	13	23	12	1	Ilimitado
TW-A13C71	13	23	12	1	Ilimitado
TW-A20B59	20	31	10	1	Ilimitado
TW-A20B60	20	31	16	1	Ilimitado
TW-A20B61	20	31	16	1	Ilimitado
TW-A40C219	40	69	21	1	Ilimitado
TW-A40C220	40	69	21	1	Ilimitado
TW-A40C221	40	69	21	1	Ilimitado
TW-A40C222	40	69	35	1	Ilimitado
TW-A40C224	40	69	35	1	Ilimitado
TW-A40D230	40	69	31	1	Ilimitado
TW-A40D231	40	69	35	1	Ilimitado
TW-A40D232	40	69	35	1	Ilimitado
TW-A40D233	40	69	35	1	Ilimitado
TW-A60A128	60	90	9	1	Ilimitado
TW-A60A129	60	90	27	1	Ilimitado
TW-A60A131	60	90	27	1	Ilimitado
TW-A60A132	60	90	45	1	Ilimitado
TW-A10A98-Cap	10	15	8	2	3
TW-A13A89-Cap	13	23	12	1	2
TW-A13C69-Cap	13	23	12	3	4
TW-A13C71-Cap	13	23	12	2	1
TW-A20B59-Cap	20	31	10	2	2
TW-A20B60-Cap	20	31	16	3	4
TW-A20B61-Cap	20	31	16	2	4
TW-A40C219-Cap	40	69	21	2	3
TW-A40C220-Cap	40	69	21	3	2
TW-A40C221-Cap	40	69	21	4	4
TW-A40C222-Cap	40	69	35	2	1
TW-A40C224-Cap	40	69	35	3	2
TW-A40D230-Cap	40	69	31	4	1
TW-A40D231-Cap	40	69	35	3	2
TW-A40D232-Cap	40	69	35	2	3
TW-A40D233-Cap	40	69	35	2	3
TW-A60A128-Cap	60	90	9	3	2
TW-A60A129-Cap	60	90	27	2	3
TW-A60A131-Cap	60	90	27	2	4
TW-A60A132-Cap	60	90	45	3	1

Fonte: O Autor (2018)

Tabela 3 – Propriedades dos Problemas

Para validar a formulação matemática aqui proposta foram utilizadas 20 instâncias (TW) do trabalho dos autores Monroy, Amaya e Langevin (2014) (Tabela 3). Os autores propõem três

formulações matemáticas para o RPP com janelas de tempo (RPPTW), um caso particular do CARPTW, em que é utilizado um único veículo com capacidade de carga infinita. Além disso, na modelagem, consideram o tempo de espera ilimitado. Para testar a formulação matemática aqui proposta foram geradas outras 20 instâncias (TW-Cap) (Tabela 3), adaptadas das 20 instâncias usadas na validação. Para gerar as instâncias TW-Cap foi considerado: demanda de 300 quilogramas de lixo sobre cada uma das arestas requeridas; número de veículos (Uniforme(1,4)); capacidade de carga dos veículos (Uniforme (300,9000)) e tempo máximo de espera (Uniforme(1,4)). Em ordem as colunas apresentadas indicam o problema; os números de: nós (n), arestas (m), arestas requeridas (r) e veículos (V). O tempo máximo de espera entre dois atendimentos consecutivos ($T_{\max}$) considerado.

A formulação matemática foi desenvolvida em *VisualBasic.NET* utilizando como *solver* o *software* de otimização *GUROBI 8.0.0* com parâmetros *default*, em um computador *Intel Core I7* com *2.4 GHz* de processamento e *8Gb* de memória *RAM* e sistema operacional *64 bits*. O tempo de processamento máximo definido foi de 3600 segundos.

A Tabela 4 expõe os resultados obtidos por meio do *solver* para as 20 instâncias utilizadas na validação com o uso formulação matemática aqui proposta (CARPTW (2018)) e os resultados apresentados no trabalho dos autores Monroy, Amaya e Langevin (RPPTW(2014)). Em ordem as colunas apresentadas indicam o problema tratado, o tempo de processamento (T em segundos), o valor obtido na função objetivo durante o tempo de processamento (FO), o GAP (em %), melhor solução factível em relação ao *Lower Bound*.

Problema	CARPTW (2018)			RPPTW (2014)		
	T	FO	GAP	T	FO	GAP
TW-A10A98	0,43	56	0	0,09	56	0
TW-A13A89	0,05	59	0	0,08	59	0
TW-A13C69	0,10	69	0	0,01	69	0
TW-A13C71	0,49	70	0	0,165	70	0
TW-A20B59	2,62	69	0	1,15	69	0
TW-A20B60	0,09	94	0	0,05	94	0
TW-A20B61	2,94	85	0	9,78	85	0
TW-A40C219	0,47	200	0	0,014	200	0
TW-A40C220	30,88	179	0	136,63	179	0
TW-A40C221	0,58	156	0	0,26	156	0
TW-A40C222	0,62	249	0	2,70	249	0
TW-A40C224	1572,69	245	0	596,89	-	-
TW-A40D230	11,45	184	0	51,79	184	0
TW-A40D231	0,97	270	0	0,89	270	0
TW-A40D232	339,17	265	0	592,57	-	-
TW-A40D233	238,71	271	0	597,45	271	0
TW-A60A128	0,33	157	0	0,05	157	0
TW-A60A129	6,36	405	0	1,25	405	0
TW-A60A131	11,31	337	0	15,52	337	0
TW-A60A132	107,21	502	0	106,07	502	0

Fonte: O Autor (2018)

Tabela 4 – CARPTW x RPPTW

Os resultados apresentados na Tabela 4 mostram que por meio da formulação matemática

proposta, o *solver* obteve, nas 18 instâncias com otimalidade, valores da função objetivo (*FO*) iguais aos apresentados no trabalho dos autores Monroy, Amaya e Langevin (2014). Além disso, durante a execução pode-se observar que nas instâncias TW-A40C224 e TWA40D232, o *solver* encontrou solução factível, com tempo de processamento inferior ao máximo considerado pelos autores (em RPPTW(2014)). Para a instância TW-A40C224, a solução factível foi encontrada com 8 segundos e para TW-A40D232 com 127 segundos. A Tabela 5 expõe os resultados obtidos por meio do *solver* para as 20 instâncias utilizadas para testar a formulação matemática.

Problema	<i>T</i>	<i>FO</i>	<i>GAP</i>
TW-A10A98-Cap	0,48	56	0
TW-A13A89-Cap	0,06	59	0
TW-A13C69-Cap	1,36	77	0
TW-A13C71-Cap	1,84	76	0
TW-A20B59-Cap	6,09	70	0
TW-A20B60-Cap	15,19	107	0
TW-A20B61-Cap	139,34	87	0
TW-A40C219-Cap	10,88	214	0
TW-A40C220-Cap	3217,26	183	0
TW-A40C221-Cap	2765,08	182	0
TW-A40C222-Cap	32,00	255	0
TW-A40C224-Cap	2034,20	245	0
TW-A40D230-Cap	785,20	187	0
TW-A40D231-Cap	1079,86	285	0
TW-A40D232-Cap	1684,44	265	0
TW-A40D233-Cap	679,41	278	0
TW-A60A128-Cap	148,28	219	0
TW-A60A129-Cap	350,21	430	0
TW-A60A131-Cap	853,98	350	0
TW-A60A132-Cap	3600,00	518	5,2124

Fonte: O Autor (2018)

Tabela 5 – Resultados Para Formulação Matemática (CARPTW)

Os resultados apresentados na Tabela 5 indicam que o *solver* encontrou solução factível para todas as instâncias e a solução ótima em 19 das 20 instâncias. A instância TW-A60A132-Cap foi resolvida até o tempo limite de processamento (3600 segundos).

5. Considerações Finais

Este trabalho apresentou uma proposta de formulação matemática para resolver o CARPTW com tempo máximo de espera. Para este tratamento especial dado ao tempo de espera foi definida a variável de tempo de espera e alterações significativas foram realizadas no clássico conjunto de restrições responsável por cronometrar o horário de entrada do veículo nas arestas requeridas. Para validar a formulação matemática proposta foram utilizadas instâncias do trabalho dos autores Monroy, Amaya e Langevin (2014) que foram adaptadas para gerar instâncias para testes.

A formulação matemática foi validada e testada com o uso do *solver* GUROBI 8.0.0 com parâmetros *default*, sobre instâncias com até 60 nós, 90 arestas e 45 arestas requeridas. Os

resultados da validação mostram que com o modelo matemático aqui proposto, o *solver* obtém, valor da função objetivo iguais aos apresentados no trabalho dos autores Monroy, Amaya e Langevin (2014). Além disso, o *solver* encontrou solução factível em duas instâncias que o trabalho dos autores Monroy, Amaya e Langevin (2014) não apresentou fazendo uso da formulação matemática. Os resultados dos testes mostram que o *solver* encontrou solução factível para todas as instâncias e solução ótima para 19 das 20 instâncias.

Referências

- CORBERÁN, A.; PRINS, C.** *Recent Results on Arc Routing Problems: An Annotated Bibliographys*. Networks. p.50-69, 2010.
- GOLDEN, B.L.; WONG, R.T.** *Capacitated Arc Routing Problems*. Networks. Vol. 11, p.305-315, 1981.
- GUAN, M.** *Graphic programming using odd and even points*. Chinese Mathematics. Vol. 1, p.273-277, 1962.
- JOHNSON, E. L.; WOHLK, S.** *Solving the Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows using Column Generation*. Coral Working Papers, University of Aarhus, Department of Business Studies, p.1-15, 2009.
- MONROY-LICHT, M.; AMAYA, C. A.; LANGEVIN, A.** *The Rural Postman Problem with Time Windows*. Networks. p.169-180, 2014.
- MULLASERIL, P.A.** *Capacitated rural postman problem with time Windows and Split Delivery*. Phd Thesis, University of Arizona, 1996.
- MURAT AFSAR, H.** *A Branch-and-Price Algorithm for Capacitated Arc Routing Problem with Flexible Time Windows*. Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol. 36, p.319-326, 2010.
- RAMDANE-CHERIF, W.** *Evolutionary Algorithms for Capacitated Arc Routing Problem with Time Windows*. XII Symposium on Information Control Problems in Manufacturing. Saint Etienne - France, 2006.
- SUN, J.; MENG, Y.; TAN, G.** *An integer programming approach for the Chinese postman problem with time-dependent travel time*. J. Comb. Optim. Vol. 29, p.565-588, 2015.
- TAGMOUTI, M.; GENDREAU, M.; POTVIN, J.Y.** *Arc routing problems with time-dependent service costs*. European Journal of Operational Research. Vol. 181, p.30-39, 2007.
- TAGMOUTI, M.; GENDREAU, M.; POTVIN, J.Y.** *A dynamic arc routing problem with time-dependent service costs*. Transportation Research Part C. Vol. 18, p.20-28, 2011.