

Análise numérica em um problema de Programação Linear com a utilização do método dos Multiplicadores de Lagrange

Rafaela Boeira Cechin (Universidade de Caxias do Sul) rafaelacechin@hotmail.com.br

Leandro Luís Corso (Universidade de Caxias do Sul) leandro.lcorso@gmail.com

Resumo:

Os Multiplicadores de Lagrange (ML), dentro do processo de otimização, apresentam a possibilidade de realizar análises de sensibilidade pós-otimização, presente no conceito de Programação Linear. O objetivo foi analisar os possíveis ganhos dentro de otimização com a utilização das informações obtidas com os ML. Para isso, foi estudado um artigo do ramo alimentício, que visa utilizar a Programação Linear a fim de reduzir o custo total do misturado milheto-soja, e que foi publicado em um periódico científico. Então foi sugerido alterações no modelo matemático, utilizando o método dos ML, que desta forma, foi possível reduzir mais de 16% do custo total do produto estudado no artigo.

Palavras chave: Pesquisa Operacional, Programação Linear, Multiplicadores de Lagrange, Alimentação.

Numerical analysis in a Linear Programming problem using the Lagrange Multipliers method

Abstract:

The Lagrange Multipliers (LM), within the optimization process, present the possibility of performing post-optimization sensitivity analyzes, present in the concept of Linear Programming. The objective was to analyze the possible gains within optimization with the use of the information obtained with LM. For this, an article in the food industry was studied, which aims to use Linear Programming to reduce the total cost of the mixed millet-soybean, which was published in a scientific journal. Then it was suggested changes in the mathematical model, using the LM method, which in this way, it was possible to reduce more than 16% of the total cost of the product studied in the article.

Key-words: Operational Research, Linear Programming, Lagrange Multipliers, Alimentation.

1. Introdução

Os estudos da Pesquisa Operacional (PO) iniciaram-se na década de 40 e a sua primeira contribuição ocorreu durante a Segunda Guerra Mundial (CHAVES, 2011). Após este momento, a utilização da PO foi tão satisfatória que decidiram dar continuidade nos estudos e expandiram para as mais diversas áreas. Kersting, Mladenov e Tokmakov (2017) comentam que há dois critérios que possibilitaram no avanço da PO: o método simplex para resolução de problemas na Programação Linear, e o surgimento dos computadores, que tornou possível a resolução de cálculos complexos com um grande volume de dados.

Dentro da Pesquisa Operacional, há os estudos de Programação Linear (PL), que, conforme Ignácio (2009) e Kersting, Mladenov e Tokmakov (2017) comentam, são problemas que

possuem constantes não negativas e somente funções matemáticas lineares, além de serem utilizados para maximizar os lucros ou minimizar os custos, por exemplo. Para estes problemas de PL, o método simplex é um procedimento eficiente e altamente utilizado para a resolução, pois ele permite a utilização de milhares de variáveis.

Após a obtenção dos resultados com a aplicação do método simplex, é possível fazer a análise de sensibilidade, em que Bre et al. (2016) define como sendo uma alteração nos parâmetros do problema, dentro de certo limite, sem alterar a solução encontrada. Para esta análise, pode ser utilizado os Multiplicadores de Lagrange (ML), método utilizado neste artigo para a análise numérica.

Como citado, o primeiro passo da análise numérica deste artigo é a escolha de uma PL apresentada na literatura científica. Em seguida, foi gerada a programação no software MatLab, a fim de replicar e analisar os resultados apresentados em um modelo matemático apresentado por Balasubramanian et al. (2012). A partir do modelo de PL, foram calculados os valores dos ML, assim como os limites de variação das constantes do lado direito das restrições, além de interpretar o significado destes valores no problema. Para finalizar, foram sugeridas modificações no modelo matemático, visando um melhoramento do artigo escolhido na literatura.

2. Multiplicadores de Lagrange

De acordo com a sugestão de Hillier e Lieberman (2005), o método dos Multiplicadores de Lagrange pode ser utilizado quando há a necessidade de realizar uma otimização condicionada com diversas restrições de igualdade. Para determinar a função lagrangeana, antes é necessário definir a função objetivo e as restrições, respectivamente representadas nas equações 1 e 2.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Onde, Hillier e Lieberman (2005) consideram que:

- a) $Z \rightarrow$ valor da medida do desempenho total;
- b) $x_n \rightarrow$ variáveis de decisão;
- c) $c_n, b_m, a_{mn} \rightarrow$ constantes de entrada ou ainda, parâmetro do modelo;
- d) restrição $m \rightarrow$ restrição funcional; e
- e) $x_n \geq 0 \rightarrow$ restrição não negativa.

Para os autores, as restrições também podem ser representadas de forma padronizada, como mostra a equação 3.

$$\begin{cases} g_1(x) = b_1 \\ g_2(x) = b_2 \\ \vdots \\ g_m(x) = b_m \\ \text{para } m < n \end{cases} \quad (3)$$

Deste modo, a função lagrangeana é apresentada na equação 4.

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i * [g_i(x) - b_i] \quad (4)$$

Para esta equação, Hillier e Lieberman (2005) conceituam que $L(x, \lambda)$ representa a Função de Lagrange e λ , o Multiplicador de Lagrange. Sendo $g_i(x) - b_i = 0$ para todos os valores de i . Para descobrir o valor de cada λ_i , necessita-se derivar a equação $L(x, \lambda)$.

Para exemplificar, consideram-se somente duas variáveis (x_1 e x_2) para a função objetivo. Ou seja, $f(x_1, x_2)$ será a função objetivo a ser maximizada, por exemplo. Ainda, será arbitrada somente uma restrição: $g(x_1, x_2) = 0$. Utilizando-se desta definição, a função lagrangeana ficará de acordo com a equação 5.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda * g(x_1, x_2) \quad (5)$$

De forma que, ao derivar parcialmente a função lagrangeana, para encontrar os valores de x_1, x_2, λ , obtêm-se os resultados apresentados na equação 6.

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x_1} = \frac{\delta[f(x_1, x_2)]}{\delta x_1} - \frac{\delta[\lambda * g(x_1, x_2)]}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta x_2} = \frac{\delta[f(x_1, x_2)]}{\delta x_2} - \frac{\delta[\lambda * g(x_1, x_2)]}{\delta x_2} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = \frac{\delta[f(x_1, x_2)]}{\delta \lambda} - \frac{\delta[\lambda * g(x_1, x_2)]}{\delta \lambda} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Onde $\delta L[x_1, x_2, \lambda] = 0$ e os resultados de x_1 e x_2 representam graficamente o ponto ótimo da função objetivo.

Ainda, os ML possuem uma interpretação econômica, porém com o mesmo significado matemático, chamado de Preço Sombra. Boussemart, Leleu e Shen (2017) afirmam que este conceito é usado em análise econômica de custo/benefício. Estes autores também comentam sobre Preço Sombra ao citar que, após as alterações nos valores das restrições, a solução otimizada originalmente passará a ser super otimizada.

3. Cálculos e análise numérica

A fim de realizar a análise numérica, foi escolhido um artigo publicado no endereço eletrônico do PubMed, que faz parte da Biblioteca Nacional de Medicina Norte Americana e há milhares de artigos disponíveis para pesquisa e referentes a diversos assuntos, por exemplo biomedicina, saúde, ciências químicas, agricultura e alimentação, bioengenharia, entre outras áreas. A escolha foi realizada com base na Programação Linear, as variáveis, os parâmetros

do problema e os resultados apresentados, de forma que fosse possível a reprodução dos resultados.

Assim, foi selecionado o artigo dos autores Balasubramanian, Singh, Patil e Onkar, e seu título é Avaliação da qualidade da extrusão do misturado de milho-soja, formulado por meio da Programação Linear. Este artigo foi publicado em 2012 na revista *Journal of Food Science and Technology*, e refere-se ao estudo feito de uma Programação Linear, a fim de reduzir os custos do produto final, porém mantendo diversos fatores de aceitação dos clientes, como por exemplo, densidade, variação da cor, dureza, textura, sabor, entre outros (BALASUBRAMANIAN et al., 2012). A função objetivo do problema descrito pelos autores está representada na equação 9, e representa a minimização do custo da mistura. As variáveis do modelo são a quantidade do misturado milho-soja, que consiste na combinação de três diferentes produtos: mexoeira, grão de soja decortado e capim pé-de-galinha.

$$\text{Minimizar } Z = C_i X_i \quad (9)$$

Os autores fazem as seguintes correlações:

- a) Z é a função matemática que representa o custo total da mistura;
- b) C_i é o custo por quilograma de cada ingrediente; e
- c) X_i é o vetor que representa a proporção de cada ingrediente utilizado na mistura.

Os autores basearam-se nas informações da Tabela 4 para formular sua Programação Linear. Está apresentado o custo unitário, quantidade de proteínas, energia e cálcio para cada uma das variáveis.

Variável	Ingrediente	Custo ¹ (Rs/kg)	Proteína (%)	Energia (kcal)	Cálcio (mg)
x_1	Mexoeira	7	11,6	361	42
x_2	Grão de soja decortado	20	43,2	432	240
x_3	Capim pé-de-galinha	8	7,3	328	344

¹ Preços de Dezembro de 2009

Fonte: Adaptado de Balasubramanian et al. (2012)

Tabela 4 – Quantidades dos ingredientes para elaboração da PL

É importante ressaltar que o custo é medido em rupias por quilograma (Rs/kg), que é a moeda oficial da Índia, país onde o artigo foi publicado. Sendo assim, o modelo matemático da PL é apresentado na Tabela 5, sendo que os coeficientes da função objetivo foram utilizados conforme sugestão dos autores.

Função objetivo: $\text{Min } Z = 0,7x_1 + 2x_2 + 0,8x_3$

(10)

Restrições	Equações	Resultados testes
Proteínas (g/d)	$11,6x_1 + 43,2x_2 + 7,3x_3 = 20$ (11)	Verificado ($20 = 20$)
Valor calórico (kcal/d)	$361x_1 + 432x_2 + 328x_3 \geq 800$ (12)	Verificado ($843 \geq 800$)
Cálcio (mg/d)	$42x_1 + 240x_2 + 344x_3 = 135$ (13)	Verificado ($135 = 135$)
Tamanho do produto	$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1,5$ (14)	Verificado ($1,5 = 1,5$)
Limitações	$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0,15$ (15)	Verificado ($0,1053 \geq 0,15$)
		$Z = 1,2039$
		$x_1 = 1,2253$
		$x_2 = 0,1053$
		$x_3 = 0,1694$

Fonte: Adaptado de Balasubramanian et al. (2012)

Tabela 5 – Programação Linear apresentado por Balasubramanian et al. (2012)

Ao observar a Tabela 5, é possível perceber que todas as equações e inequações são lineares, atendendo à primeira característica imposta pelos modelos de otimização linear. A segunda propriedade também é atendida, já que nenhuma restrição é não negativa. No MatLab, a função *linprog* permite cálculos de inequações, porém com sinal de menor ou igual. Assim, a equação 12 é modificada para a equação 16, apresentada a seguir.

$$-361x_1 - 432x_2 - 328x_3 \leq -800 \quad (16)$$

A segunda etapa deste artigo consiste na reprodução destes valores no software MatLab. Porém, algumas alterações nas restrições são necessárias para possibilitar os resultados apresentados por Balasubramanian et al. (2012). Isso se deve pelo motivo de as equações apresentadas pelos autores violarem as restrições que os mesmos estabeleceram no artigo, ou seja, as respostas não estão de acordo com o modelo matemático apresentado. Por esse motivo, as equações 16 e 15 devem ser modificadas para, respectivamente, as equações 17 e 18, para estarem de acordo.

$$-361x_1 - 432x_2 - 328x_3 \leq -500 \quad (17)$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \leq 0,15 \quad (18)$$

Desta forma, o modelo matemático se torna possível de solução para os parâmetros apresentados. O modelo de Programação Linear reescrito está representado na equação 19.

$$\text{Minimizar } Z = 0,7x_1 + 2x_2 + 0,8x_3$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{cases} 11,6x_1 + 43,2x_2 + 7,3x_3 = 20 \\ -361x_1 - 432x_2 - 328x_3 \leq -500 \\ 42x_1 + 240x_2 + 344x_3 = 135 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1,5 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \leq 0,15 \end{cases} \quad (19)$$

Como terceira etapa, após as devidas alterações, foi possível reproduzir os valores de Z , x_1 , x_2 , e x_3 encontrados no artigo dos autores. A Tabela 6 apresenta os valores calculados com a otimização.

X	1,2253	
	0,1053	
	0,1694	
FVAL	1,2039	
Multiplicadores de Lagrange	Inequações	2,0258E-15
		6,2672E-15
	Equações	-0,0359
		-8,4178E-04
		-0,2486

Fonte: Adaptado do MatLab (2015)

Tabela 6 – Valores encontrados com a otimização

Os valores das variáveis (x) que a Tabela 6 apresenta significam a quantidade necessária, em kg, de cada ingrediente, sendo que x_1 corresponde para a quantidade de mexoeira, x_2 para o grão de soja decortado e x_3 para o capim pé-de-galinha; e o valor da função objetivo ($fval$) representa o custo, em rupias, para a produção do produto final. Estes resultados podem ser interpretados como a solução otimizada para o problema, levando em consideração as restrições impostas.

Ao resolver o modelo matemático linear, é possível também se obter os valores para os Multiplicadores de Lagrange. Desta forma, obtendo-se cinco valores, pois há um valor dos ML para cada restrição da programação, e neste artigo, havia duas inequações e três equações. Para as restrições das inequações, o valor dos ML obtido foi abaixo da tolerância de $e-8$ utilizada por *linprog*, os quais se assumiram como zero para este trabalho. Por isso, pode-se considerar que estas restrições são inativas. Para as restrições das equações, como os ML são diferentes de zero, estas são consideradas ativas.

Para a aplicação da teoria do Preço Sombra, é necessário conhecer os limites inferiores e superiores das constantes do lado direito das restrições, apresentados na Tabela 7. Estes valores foram obtidos com o software SciPy e são os limites inferiores e superiores do lado direito das restrições (também chamados de valor de segundo membro).

Restrição	Limite inferior	Valor atual	Limite superior
1	16,7374	20	21,53715
2	-543,3	-500	$+\infty$
3	79,292	135	242,997
4	1,37394	1,5	1,79719
5	0,10533	0,15	$+\infty$

Fonte: Adaptado de SciPy (2015)

Tabela 71 – Variação das constantes do lado direito das restrições

Os valores encontrados na Tabela 6 para os ML significam o quanto impactaria o lucro máximo se fosse adicionado uma unidade de cada recurso, ou seja, exemplificando com a primeira restrição, para cada grama a menos de proteína disponível como recurso, o custo da função objetivo diminui em 0,0359 rupias. Porém, este conceito só se aplica se a variação dos valores das constantes do lado direito das restrições, variar dentro dos limites inferiores e superiores, que foram apresentados na Tabela 7. Da mesma forma que, no exemplo anterior, a grama reduzida de proteína só reduzirá o custo em 0,0359 rupias se a quantidade de proteína não diminuir além de 16,7374g.

Como explicado anteriormente, as inequações possuem restrições inativas. Por este motivo, os limites superiores da segunda e da quinta restrição são $+\infty$. Quanto aos coeficientes da função objetivo, eles podem ser alterados para $-\infty$ e $+\infty$, sem alterar o valor ótimo das variáveis. Isso ocorre devido às igualdades nas restrições, as quais limitam o espaço de soluções.

O valor da função objetivo da Tabela 6 representa o valor otimizado do problema. Para finalizar a análise numérica deste artigo, é sugerido algumas alterações, para tornar o resultado super otimizado, que o seu impacto no custo está apresentado na Tabela 8. Como o objetivo do trabalho de Balasubramanian et al. (2012) é a minimização do custo do produto, então foi sugerido que alterassem as constantes do lado direito das restrições ativas para os seus respectivos limites inferiores, conforme também mostrado na tabela a seguir.

Restrição	Valor dado no problema	Valor sugerido	ML	Impacto no custo
1	20	16,7374	0,0359	0,11712734
2	-500	Restrição inativa	0	0
3	135	79,292	0,00084178	0,04689388
4	1,5	1,37394	0,2486	0,031338516
5	0,15	Restrição inativa	0	0
			Total:	0,195359736

Fonte: Elaborado pelos autores (2015)

Tabela 2 – Modificações sugeridas

Assim, a Programação Linear ficou de acordo com a equação 20.

Minimizar $Z = 0,7x_1 + 2x_2 + 0,8x_3$

Sujeito às restrições:

$$\begin{cases} 11,6x_1 + 43,2x_2 + 7,3x_3 = 16,7374 \\ -361x_1 - 432x_2 - 328x_3 \leq -500 \\ 42x_1 + 240x_2 + 344x_3 = 79,292 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 1,37394 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \leq 0,15 \end{cases} \quad (20)$$

Então, foi calculado o quanto impactaria no custo, ou seja, foi calculada a diferença de valores entre o dado no problema e o sugerido, e multiplicado pelos seus respectivos ML. Para as inequações, não foram sugeridas mudanças, pois como seus ML são iguais à zero, estas restrições não impactam no custo final do produto.

O total deste impacto calculado foi de aproximadamente 0,1954 rupias, ou seja, o custo do produto foi reduzido para 1,0085 rupias. Concluindo, o custo da solução otimizada ficou de 1,2039 rupias; e custo da solução super otimizada é de 1,0085 rupias; significando uma redução de 16,23% no custo.

4. Conclusão

É possível utilizar a PO em complexas aplicações e, uma das vantagens é a possibilidade de testar teoricamente diversos cenários, por simulações computacionais. Assim, evitam-se gastos desnecessários para uma empresa, já que uma análise computacional não possui riscos econômicos, podendo ser viável analisar a melhor alternativa para determinado problema da organização e só então, aplicá-lo. A PO fornece o melhor cenário possível para um problema, e a exploração dos ML podem ainda melhorar este cenário. Em contrapartida, este método ainda não é muito utilizado nas empresas, infelizmente.

Além, foi evidenciada a assistência que os *softwares* matemáticos proporcionaram para este tipo de modelagem matemática, uma vez que validaram os resultados do artigo e ainda forneceram informações adicionais. Pelas alterações realizadas na PL, foi possível perceber a importância de se ter uma programação bem formulada, pois somente assim pode-se confiar no resultado obtido.

Utilizando-se do exemplo estudado neste artigo, pode-se observar uma redução no custo do produto de mais de 16%, alterando somente os parâmetros da Programação Linear. Considerando a aplicação deste método em uma empresa real, ainda há diversos dados que poderiam ser alterados, como por exemplo, custo da matéria-prima, layout do setor de fabricação, estoque, entre outros; parâmetros em que os ML também podem ser aplicados e otimizados.

Referências bibliográficas

BALASUBRAMANIAN, S. et al. *Quality evaluation of millet-soy blended extrudates formulated through linear programming*. Journal of food science and technology, v. 49, n. 4, p. 450-458, 2012.

BOUSSEMART, Jean-Philippe; LELEU, Hervé; SHEN, Zhiyang. *Worldwide carbon shadow prices during 1990–2011*. Energy Policy, v. 109, p. 288-296, 2017.

BRE, Facundo; SILVA, Arthur Santos; GHISI, EneDir; FACHINOTTI, Victor. *Residential building design optimization using sensitivity analysis and genetic algorithm*. Energy and Buildings, v. 133, p. 853-866, 2016.

CHAVES, Viviane Hengler Corrêa. *Perspectivas históricas da Pesquisa Operacional*. 2011, 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Rio Claro, 2011.

HILLIER, Frederick; LIEBERMAN, Gerald. *Introduction to Operations Research*. 8ª ed. Nova Iorque: McGraw-Hill.

IGNÁCIO, Bruno Alvarez Ferreira. *Desenvolvimento de um modelo de Programação Linear para apoio à tomada de decisão em uma cadeia de suprimentos*. 2009, 195 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica) – Centro Universitário da FEI, São Bernardo do Campo, 2009.

KERSTING, Kristian; MLADENOV, Martin; TOKMAKOV, Pavel. *Relational linear programming*. Artificial Intelligence, v. 244, p. 188-216, 2017.