

Otimização multiobjetivo: uma abordagem conceitual

Luciana Maichaki Marçal Delinski (UTFPR) lu.marcal@hotmail.com

João Carlos Colmenero (UTFPR) colmenero@utfpr.edu.br

Resumo:

O presente estudo tem como objetivo abordar conceitos relacionados a otimização multiobjetivo, consistindo em problemas que possuem dois ou mais objetivos para serem otimizados. A otimização multiobjetivo vem sendo utilizada por diversos autores e em diversas áreas. Serão classificados os métodos utilizados para detectar as soluções não dominadas, podendo ser métodos geradores ou métodos baseados em preferências. Bem como, serão contextualizadas algumas abordagens que geralmente são utilizadas na otimização multiobjetivo, incluindo os algoritmos genéticos, os quais foram desenvolvidos após serem detectadas algumas limitações na otimização multiobjetivo.

Palavras chave: Modelagem matemática, otimização multiobjetivo, algoritmos genéticos.

Multiobjective optimization: a conceptual approach

Abstract

The present study has the objective to approach concepts related to multiobjective optimization, being problems that have two or more objectives to be optimized. Multiobjective optimization has been used by several authors and in several areas. Will be classified the methods to find the non-dominated solutions will be described, being generative methods or methods based on preferences. As well, will be contextualized some approaches that are generally used in multiobjective optimization, including genetic algorithms, which were developed after detecting some limitations in multiobjective optimization.

Key-words: Mathematical modeling, multiobjective optimization, genetic algorithms.

1. Introdução

De modo geral, as organizações se deparam constantemente com problemas que devem ser solucionados, podendo ser em diversas áreas. Muitas vezes o problema é um tanto quanto complexo para ser resolvido apenas por tomada de decisões gerenciais, sem embasamentos suficientes, pois podem envolver diversos fatores para a solução. Como também, o problema pode não ter grande complexidade, mas a organização necessitar que o problema seja resolvido com maior confiabilidade.

Então, julga-se necessária a utilização de meios para que tais problemas sejam solucionados com tamanha confiabilidade. Um dos meios que pode ser utilizado é a programação matemática. Onde pode-se obter a solução das variáveis do problema para auxílio na tomada de decisão ideal.

A modelagem matemática é composta pela função objetivo, a qual possui as variáveis de decisão do problema e a mesma pode ser maximizada ou minimizada. Bem como, geralmente,

existem fatores que influenciam na resolução do problema, assim, a modelagem também é composta pelas restrições, tornando o modelo mais real. No entanto nem sempre o problema possui apenas um objetivo, por isso pode-se utilizar da otimização multiobjetivo. Modelagem que permite que sejam otimizados dois ou mais objetivos simultaneamente.

Sendo assim, este artigo tem como objetivo descrever a definição, métodos e abordagens clássicas da otimização multiobjetivo, bem como sua devida aplicação real. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica, documental, qualitativa e exploratória.

2. Definição de otimização multiobjetivo

Um problema de otimização multiobjetivo se caracteriza por possuir duas ou mais funções objetivas para serem otimizadas simultaneamente, sendo que na maioria dos casos tais funções podem ser conflitantes (COELLO, 2006).

Tal problema de otimização multiobjetivo pode ser representado como mostrado a seguir:

$$\begin{array}{lll} \text{Max ou Min} & f_m(x) & m = 1, 2 \dots M \\ \text{Sujeito a:} & g_j(x) \geq 0 & j = 1, 2 \dots J \\ & h_k(x) = 0 & k = 1, 2 \dots K \\ & x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)} & i = 1, 2 \dots n \end{array}$$

Segundo Deb (2011) uma solução é um vetor de n variáveis de decisão. As soluções que satisfazem os limites variáveis e as restrições constituem um espaço variável de decisão. As funções objetivas constituem um espaço multidimensional, além do espaço variável de decisão, sendo denominado espaço objetivo. De modo que para cada solução x no espaço variável de decisão um ponto existe no espaço objetivo. Sendo que uma “solução” é referida a um vetor variável e um “ponto” como um vetor objetivo correspondente.

Geralmente os problemas de multiobjetivo não detectam apenas uma solução que otimizem todos os objetivos simultaneamente. Assim, para detectar soluções pode-se tentar melhorar um determinado objetivo e fazer com que outro objetivo seja influenciado. Uma solução do problema que não influencie negativamente nenhum objetivo é denominada como não dominada, pareto ótimo ou pareto eficiente. Sendo que a finalidade de um problema multiobjetivo é detectar paretos ideais e quantificar *trade-offs* (DEMIR, BEKTAS e GILBERT, 2014).

O conjunto de todas as soluções viáveis não dominadas é denominado como um conjunto ótimo de pareto. Assim, para um determinado conjunto ótimo de Pareto os valores da função objetivo correspondentes no espaço objetivo são chamados de frente de Pareto. De modo que um problema de otimização multiobjetivo deve atingir os três objetivos conflitantes (ZITZLER, DEB e THIELE, 2000):

- a) A frente de pareto mais conhecida e o conjunto de pareto mais conhecido deve se aproximar da verdadeira frente de pareto e deve ser um subconjunto do conjunto ótimo de pareto, respectivamente;
- b) Para o decisor obter uma imagem real dos trade-off devem ser distribuídas de maneira uniforme as soluções no conjunto de pareto sobre a frente de pareto;
- c) A frente de Pareto mais conhecida deve capturar todo o espectro da frente de Pareto.

De modo que qualquer ponto encontrado no conjunto de pareto ótimo é uma solução aceitável, basta detectar qual o melhor ponto a ser utilizado como solução do problema, é necessário seguir as três técnicas de análise multiobjetivo para a melhor tomada de decisão (COHON e

MARKS, 1975):

- Geração de conjunto de solução não dominadas;
- Procedimentos que obtenham informações antecipadas das preferências;
- Utilização de procedimentos para selecionar o melhor ponto com base nas preferências.

Segundo Haimes e Chankong (1979) em todo o processo é necessário conter um analista e um decisor. O analista, geralmente, é um software que é utilizado para a solução do problema matemático, onde é gerado as soluções não dominadas. Assim, o decisor é uma equipe ou uma pessoa que conheça o problema a ponto de ser capaz de detectar preferência entre as soluções geradas pelo analista.

Na Figura 3 é possível demonstrar os passos seguidos em uma otimização multiobjetivo e a diferença existente entre uma otimização com um único objetivo e com dois ou mais objetivos. O primeiro caso pode ser contido com apenas a primeira etapa do fluxo, assim já detectando a solução ótima, diferentemente da otimização multiobjetivo (DEB, 2011).

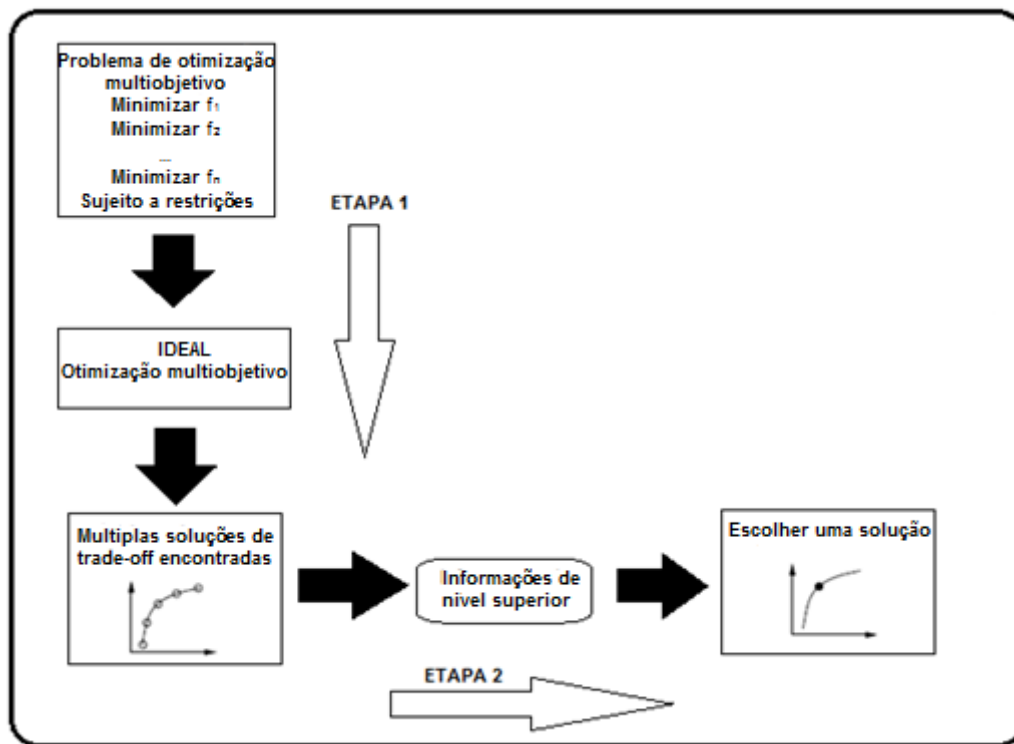


Figura 3: Fluxo de um procedimento de otimização multiobjetivo por duas etapas.

Fonte: Traduzido de DEB, 2011

Na primeira etapa, demonstrada na Figura 3 verticalmente para baixo, são encontrados os pontos não dominados. Já na segunda etapa, demonstrada horizontalmente para direita, são utilizadas informações pertinentes para escolher o melhor ponto obtido da etapa 1 (DEB, 2011).

Basicamente, o processo de otimização multiobjetivo é composto de duas etapas, obtenção das soluções e tomada de decisão. No entanto, pode ocorrer em ordens diferentes, por isso existem métodos classificados conforme as etapas são seguidas para a detecção do pareto ótimo.

3. Classificação dos métodos multiobjetivos

Para as soluções ótimas de pareto ser encontrada existem alguns métodos utilizados na resolução dos problemas multiobjetivos, tais métodos podem ser classificados em dois grupos

(EHRGOTT e GANDIBLEUX, 2002):

- a) Métodos geradores: geração de pontos de pareto ótimos sem contribuição antecipada do decisor. Sendo este método dividido em três:
 - Métodos sem preferência: para este método não são necessárias informações adicionais do decisor e, geralmente, apenas um ponto ótimo de pareto é obtido como solução;
 - Métodos *a posteriori* usando abordagem de escalarização: neste método o decisor utiliza suas informações para escolher o melhor ponto de pareto após a solução do conjunto de pareto. A abordagem de escalarização é quando os objetivos são transformados em uma única função objetiva, denominada função de escalarização;
 - Método *a posteriori* usando uma abordagem multiobjetivo: como este método é *a posteriori* também é utilizada informações do decisor para encontrar o melhor ponto de pareto. No entanto, este utiliza como base os valores obtidos das funções objetivas para avaliação dos objetivos.
- b) Métodos baseados em preferencias: soluções geradas com informações do decisor. Este método pode ser dividido em dois tipos:
 - *A priori*: neste método o decisor utiliza suas preferencias antes da resolução do problema. Geralmente essa preferência é demonstrada classificando os objetivos em ordem de prioridade e assim é resolvido o problema utilizando as funções objetivas isoladamente e na sua ordem utilizando o resultado da função anterior;
 - Métodos iterativos: nos métodos iterativos é feita a interação das informações do decisor durante o processo de solução, utilizando as soluções parciais para demonstrar preferencias.

4. Exemplos de abordagens utilizados na otimização multiobjetivo

Existem alguns métodos pré-definidos que podem ser utilizadas para obter a solução ótima de pareto de um problema multiobjetivo. Como, por exemplo, método dos pesos, programação por metas, método de restrições e algoritmos genéticos multiobjetivos.

4.1 Método dos pesos

A primeira aplicação deste método foi realizada pelo autor Zadeh (1963). Onde o autor descreve que a principal característica do método é a junção de todas as funções objetivas em apenas uma. Sendo esta função composta pela soma ponderada das funções existentes no problema. Utilizando das mesmas restrições. Este pode ser um método baseado em preferência ou gerador, depende de como é realizada escolha dos pesos, se é o próprio decisor ou é um método computacional.

4.2 Programação por metas

A maioria dos problemas encontrados são formados com objetivos e restrições conflitantes. Então, com esta limitação encontrada surgiu a programação por metas. Onde esta abordagem sugere remanejar as restrições e/ou objetivos conflitantes, de modo a minimizar os desvios em relação aos objetivos do problema. Sendo a solução ótima aquela que obter o valor de desvio mais próximo de zero (IGNIZIO, 1978).

4.3 Método da ϵ – restrição

Os autores Haimes, Lasdon e Wismer (1971) foram os pioneiros a aplicá-lo. Sendo que esta abordagem sugere que seja otimizado apenas um objetivo por vez, enquanto os outros objetivos

tornam-se restrições. São computados pontos extremos dos objetivos, os quais são utilizados como limites.

Segundo Mavrotas (2009) esse método possui vantagens em relação ao método dos pesos. No entanto existe algumas desvantagens na sua utilização, como por exemplo, quando o problema possui mais de duas funções objetivas o tempo para encontrar a solução ótima é elevado.

4.4 Algoritmos genéticos multiobjetivos

Os algoritmos genéticos foram desenvolvidos por autores que perceberam algumas limitações nas técnicas de programação matemática multiobjetivo. Por exemplo, quando a frente de pareto é côncava ou desconectada o problema pode não ter uma solução ótima, ou seja, o problema depende da forma da frente de pareto para conseguir detectar uma solução. Bem como geralmente, é gerada apenas uma solução, tendo que ser executado várias vezes para gerar um conjunto ótimo de pareto. Outra limitação é a exigência de diferenciação das funções objetivas e restrições (COELLO, 2006).

Desta maneira, o autor Coello (2006) destaca que os algoritmos genéticos são menos suscetíveis a forma da frente de pareto e são capazes de gerar um conjunto de soluções ótimas em apenas uma execução do algoritmo. O pioneiro a desenvolver um algoritmo genético foi Goldberg em 1983, denominado VEGA (*Vector Evaluated Genetic Algorithm*), no entanto o mesmo não teve uma implementação real. Assim, com base neste algoritmo vários autores desenvolveram novos algoritmos, com implementação real.

De acordo com Deb (2000) os algoritmos genéticos desenvolvidos podem ser classificados em algoritmos genéticos multiobjectivo não elitistas (primeira geração) e algoritmos genéticos multiobjectivo elitistas (segunda geração). Sendo que o elitismo acontece através da preservação das soluções não-dominadas entre uma população e outra. Assim, é possível detectar soluções não-dominadas com maior confiabilidade, pois as soluções não são deterioradas.

4.4.1 Primeira Geração

A primeira geração dos algoritmos desenvolvidos foi entre os anos 1989 e 1998 e tem como característica a não utilizar o elitismo. Segundo Coello (2006) os mais representativos são:

a) *NSGA (Nondominated Sorting Genetic Algorithm):*

Os pioneiros a utilizar o algoritmo NSGA foram Srinivas e Deb (1995). Segundo os autores o método pode localizar várias soluções de pareto ótimo em uma resolução, ocorrendo até que todos os pontos sejam dispostos.

No entanto o método foi criticado por possuir alta complexidade computacional, falta de estilismo e a necessidade de especificar o parâmetro de compartilhamento (DEB et al., 2001);

b) *NPGA (Niche-Pareto Genetic Algorithm):*

Horn, Nafpliotis e Goldberg (1994) foram os autores do NPGA, sendo utilizado em dois problemas fictícios, para teste do algoritmo, e em um problema real de hidrossistemas.

O algoritmo é baseado em técnicas de seleção. Onde dois pontos da população são escolhidos aleatoriamente para realizar o chamado torneio de seleção, assim o melhor ponto entre os dois participa do próximo torneio. Os tamanhos destes torneios determinam a velocidade de convergência do problema (HORN, NAFPLIOTIS e GOLDBERG, 1994).

Para detectar múltiplas soluções ótimas de pareto devem ser adicionados torneios de dominação de pareto, onde também são escolhidos conjuntos de comparação dos pontos. Sendo que cada

um dos candidatos é comparado com cada ponto no determinado conjunto. Quando ocorre um torneio não-dominante, ou seja, ocorre um empate, é implementado o compartilhamento. Onde os pontos são alocados nos picos do espaço de busca, sendo que cada pico agrega pontos proporcionais à sua altura (HORN, NAFPLIOTIS e GOLDBERG, 1994);

c) *MOGA (Multi-Objective Genetic Algorithm):*

O MOGA foi uma proposta de Fonseca e Fleming (1993), onde o algoritmo define uma população de início para realizar a comparação entre os pontos. Para isso é avaliada suas funções objetivas e os intervalos identificados com relação as frentes de pareto.

4.4.2 Segunda Geração

A segunda geração do desenvolvimento dos algoritmos genéticos foi caracterizada pela ênfase na eficiência, bem como a utilização do elitismo. Segundo Coello (2006) os mais relevantes são:

a) *SPEA (Strength Pareto Evolutionary Algorithm):*

O algoritmo utiliza a população regular e um conjunto externo (arquivo). Os indivíduos da população não estão nomeados são copiados para o conjunto externo, o qual está vazio até o momento. Assim são atribuídos valores de aptidão aos indivíduos, tanto da população como do conjunto externo. Cada indivíduo do arquivo adquire um valor de força, o qual representa seu valor de aptidão. O valor é obtido pela divisão do número de membros da população que são dominados pelo tamanho da população e acrescentado um. Já a aptidão de um indivíduo da população é calculada somando os valores de força de todos os membros do arquivo que dominam e adicionado um. Posteriormente são realizados torneios binários e realizada a recombinação e mutação, assim é obtida a população descendente resultante (ZITZLER e THIELE, 1999);

b) *SPEA 2 (Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2):*

O algoritmo SPEA 2 é uma evolução do SPEA, possui algumas melhorias, sendo as três principais (ZITZLER, LAUMANNNS e THIELE, 2002):

- A orientação da pesquisa ficou mais eficiente com a utilização da técnica de estimativa de densidade;
- As soluções estão mais precisas devido ao aprimoramento do método de truncamento;
- Possui nova estratégia de atribuição, levando em consideração cada indivíduo dominante e dominado;

c) *PAES (Pareto Archived Evolution Strategy):*

O PAES é caracterizado por um pai originar apenas um filho, utilizando arquivo externo onde contém soluções ótimas que já foram obtidas, como também realiza uma busca no próprio arquivo. Sendo esta denominada como uma estratégia evolutiva (1+1). Assim, é utilizado este arquivo como referência para a classificação de dominância dos indivíduos (KNOWLES e CORNE, 2000);

d) *NSGA-II (Nondominated Sorting Genetic Algorithm II):*

Com as críticas impostas ao NSGA, Deb et al. (2002) apresentaram o algoritmo NSGA-II. Tendo este o intuito de não contemplar tais limitações e tornar o algoritmo mais usual. O algoritmo trabalha com a comparação de duas soluções, obtendo a população filha, o qual é utilizada para prosseguir com a execução do problema.

No torneio uma solução domina a outra quando tem o melhor rank e se caso possuam o mesmo rank, domina a que tiver melhor distancia. Assim, é realizada a mutação e recombinação dos indivíduos. Após, com o intuito de garantir o elitismo os conjuntos pai e filho são aglomerados na mesma população para aplicar a classificação não dominada em frentes de dominância (DEB et al., 2002).

O Quadro 1 descreve as vantagens e desvantagens de cada algoritmo genético.

Quadro 1 – Vantagens e desvantagens dos algoritmos genéticos

ALGORITMO	VANTAGENS	DESVANTAGENS
NSGA	Rápida convergência.	Problemas relacionados ao parâmetro de tamanho de nicho.
NPGA	Processo de seleção muito simples com seleção de torneios.	Problemas relacionados ao parâmetro de tamanho de nicho. Contém parâmetro extra para seleção de torneios.
MOGA	Extensão simples.	Normalmente a convergência é lenta. Problemas relacionados ao parâmetro de tamanho de nicho.
SPEA	Bem testado. Nenhum parâmetro para agrupamento.	Algoritmo de agrupamento complexo.
SPEA 2	SPEA melhorado. Certifica de que os pontos extremos sejam preservados.	Cálculo computacional dispendioso.
PAES	Estratégia de mutação aleatória.	Não é uma abordagem baseada na população.
NSGA-II	Parâmetro único. Bem testado.	A distância de aglomeração funciona apenas no espaço objetivo.

Fonte: Adaptado e traduzido de Konak, Coit e Smith (2006)

Todos os algoritmos possuem vantagens e desvantagens. Sendo que a principal desvantagem da primeira geração são os problemas relacionados ao parâmetro de tamanho de nicho, a qual já não é apresentada na segunda geração. Bem como, a vantagem mais comum entre os algoritmos da segunda geração é o teste eficiente que foi realizado.

4. Aplicação da otimização multiobjetivo

De acordo com Coello (2006) a otimização multiobjetivo é utilizada para resolução de problemas no mundo real em várias áreas diferentes. Pode-se dividir em três áreas de aplicação: a área de engenharia é a que mais utiliza, aplicações em engenharia hidráulica, estrutural, aeronáutica e robótica e controle. Área industrial também utiliza em design e fabricação, programação e gerenciamento. A terceira área é a científica, sendo aplicação em química, física, medicina e informática.

A seguir serão demonstradas algumas das utilizações da otimização multiobjetivo presentes na literatura:

- Os autores Kravanja e Cucek (2013) utilizaram a otimização multiobjetivo em duas abordagens, a primeira baseia-se no índice relativo de sustentabilidade direta e o segundo problema é baseado no conceito de custo ecológico e lucro líquido. Com a resolução de maximização do lucro total é possível estabelecer um *trade-off* adequado entre critérios econômicos e ambientais;
- Kannan et al. (2008) utilizaram a otimização multiobjetivo por meio do algoritmo genético NSGA-II para o problema de planejamento de expansão de geração. Onde o

primeiro objetivo é minimizar o custo do investimento e o segundo objetivo é minimizar o custo de interrupção ou maximizar a confiabilidade;

- c) Foi desenvolvido um modelo de otimização multiobjetivo para contemplar algumas limitações existentes na avaliação de ciclo de vida (ACV) utilizado para identificar sistematicamente o uso ecológico da biomassa para a energia. As restrições do modelo são compostas pela disponibilidade de biomassa e terras aráveis, bem como algumas metas políticas e as capacidades de tecnologia (VADENBO, TONINI e ASTRUP, 2017);
- d) Os autores Shadiya, Satish e High (2012) utilizaram a otimização multiobjetivo como etapa final para a redução de resíduos em uma organização. A otimização teve como objetivo minimizar os resíduos e simultaneamente maximizar o lucro. Com tal otimização executada os autores observaram melhorias significativas nos impactos ambientais;
- e) A otimização multiobjetivo também foi utilizada para o projeto de entrada e saída para a abertura de novos ramos. Pois muitas empresas abrem novas franquias e assim necessitam planejar quais quantidades ideais de entradas e saídas a serem utilizadas e produzidas (PARK e SHIN, 2012);
- f) Os tratamentos de câncer também foram alvo da otimização multiobjetivo. O método tem o objetivo de auxiliar na viabilidade dos tratamentos para determinado tipo de câncer. Para esta otimização foram utilizados pesos inversamente proporcionais nas funções objetivas (CHAN et al., 2014);
- g) Os autores Yang e Chou (2011) desenvolveram um modelo de otimização multiobjetivo denominado MUST, com o intuito de auxiliar na atribuição de mão-de-obra em empresas de consultoria de engenharia. Algoritmo que tem como objetivo de maximizar o lucro, evitar o excesso de horas extras e eliminar a ociosidade, bem como dar preferencia aos projetos com propriedades especificadas. Assim, o modelo demonstrou que a solução ótima auxiliou os decisores para escolher um plano de ação adequado.
- h) Kaldirim e Kose (2006) utilizaram a otimização multiobjetivo para modelar dieta, onde o objetivo era minimizar o custo da dieta e maximizar a preferencia alimentar, bem como atender aos mínimos requisitos nutricionais necessários ao ser humano.

No entanto existem áreas que podem ser aplicadas a otimização multiobjetivo, mas a literatura contempla poucos estudos, sendo área de mineração, bioinformática, financeira, entre outras (COELLO, 2006).

5. Conclusão

A otimização multiobjetivo é utilizada para auxiliar na resolução de problemas, sendo composta, geralmente, por duas ou mais funções objetivas e as restrições do problema. As funções objetivas são otimizadas simultaneamente e contemplam as variáveis de decisões. As restrições contemplam os fatores que influenciam no problema. Com o modelo otimizado será encontrado um conjunto ótimo de pareto, ou seja, soluções não dominadas.

Existem diferentes métodos para a resolução do modelo, podendo ser métodos geradores, onde a geração de pontos de pareto ótimos não tem contribuição antecipada do decisor ou métodos baseados em preferências, onde as soluções são geradas com informações do decisor. Como exemplo é possível citar o método dos pesos, das restrições e a programação por metas.

Bem como, foram desenvolvidos algoritmos genéticos para auxiliar na utilização da otimização multiobjetivo, sendo os mais utilizados: SPEA, NSGA, NPGA, MOGA, SPEA 2, PAES,

NSGA-II. Cada um tem sua característica, vantagens e desvantagens. Cabendo ao decisor a escolha de qual o melhor algoritmo para ser utilizado para a resolução de seu problema.

Diferentes áreas utilizam a otimização multiobjetivo e seus métodos. Assim, como sugestão para trabalhos futuros sugere-se a utilização da otimização multiobjetivo nas áreas de mineração, bioinformática e financeira. Pois são áreas possíveis de aplicação, mas que ainda não foram contempladas na literatura.

Referências

CHAN, T. C. Y.; CRAIQ, T.; LEE, T.; SHARPE, M. B. *Generalized Inverse Multiobjective Optimization with Application to Cancer Therapy*. Operations Research, v. 62, n. 3, p. 680-695, 2014.

COELLO, C. A. C. *Evolutionary Multi-Objective Optimization: A historical View of the Field*. IEEE Computational Intelligence magazine, p. 28-36, fevereiro, 2006.

COHON, J. L.; MARKS, D. H. *A review and evaluation of multiobjective programing techniques*. Water Resources Research, v. 11, n. 2, p.208-220, 1975.

DEB, K. *An efficient constraint handling method for genetic algorithms*. Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, v. 186, n. 2, p.311-338, jun. 2000.

DEB, K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms: An Introduction*. Department of Mechanical Engineering Indian Institute of Technology Kanpur Kanpur, India, February 10, 2011.

DEB, K.; AGRAWAL, S.; PRATAP, A.; MEYARIVAN, T. *A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi- Objective Optimization: NSGA-II ,”* KanGAL Report No. 200001, Kanpur Genetic Algorithms Laboratory (KanGAL), Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2001.

DEB, K.; PRATAP, A.; AGARWAL, S; MEYARIVAN, T. *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II*. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002.

DEMIR, E.; BEKTAS, T.; LAPORTE, G. *The bi-objective Pollution-Routing Problem*. European Journal of Operational Research, v. 232, n. 3, p.464-478, 2014.

EHRGOTT, M.; GANDIBLEUX, X. *Multiple criteria optimization: State of the art annotated bibliographic surveys*. Dordrecht: Kluwer, 2002.

FONSECA, C. M.; FLEMING, P. J. *Genetic algorithms for multiobjective optimization: formulation, discussion and generalization*. Proceedings of the 5th international conference on genetic algorithms. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., p.416–423, 1993.

HAIMES, Y. Y.; LASDON, U.; WISMER, D. A. *On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization*. IEEE transactions systems man cybernetics, v.1, n. 3, p. 296–297, 1971.

HAIMES, Y. Y.; CHANKONG, V. *Kuhn-Tucker multipliers as trade-offs in multiobjective decision-making analysis*. Automatic, v. 15, n. 1, p.59-72, 1979.

HORN, J.; NAFPLIOTIS, N.; GOLDBERG, D. E. *A niched Pareto genetic algorithm for multiobjective optimization*. Evolutionary computation, v.1, p.82–87, 1994.

IGNIZIO, J. P. *A Review of Goal Programming: A Tool for Multiobjective Analysis*. The Journal of the Operational Research Society, v. 29, n. 11, p.1109-1119, 1978.

KALDIRIM, E.; KOSE, Z. *Application of a multi-objective genetic algorithm to the modified diet problem*. Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO), Seattle, WA, USA, 8 a 12 de julho de 2006.

KANNAN, S.; BASCAR, S.; MCCALLEY, J. D.; MURUGAN, P. *Application of NSGA-II Algorithm to Generation Expansion Planning*. IEEE Transactions on Power Systems, v. 24, n. 1, p.454-461, 2009.

KNOWLES, J. D.; CORNE, D. W. *Approximating the nondominated front using the pareto archived evolution strategy*. Evolutionary Computation, v. 8, n. 2, p. 149–172, 2000.

KONAK, A.; COIT, D. W.; SMITH, A. E. *Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial*. Reliability Engineering & System Safety, v. 91, n. 9, p. 992-1007, 2006.

- KRAVANJA, Z.; CUCEK, L.** *Multi-objective optimisation for generating sustainable solutions considering total effects on the environment.* Applied Energy, v. 101, p. 67-80, 2013.
- MAVROTAS, G.** *Effective implementation of the ϵ -constraint method in Multi-Objective Mathematical Programming problems.* Applied Mathematics and Computation, v. 213, n. 2, p.455-465, 2009.
- PARK, K. S.; SHIN, D. E.** *Interactive multiobjective optimization approach to the input-output design of opening new branches.* European Journal of Operational Research, v. 220, n.2, p. 530-538, 2012.
- SHADIYA, O.O.; SATISH, V.; HIGH, K. A.** *Process enhancement through waste minimization an multiobjective optimization.* Journal of Cleaner Production, v. 31, p. 137-149, 2012.
- SRINIVAS, N.; DEB, K.** *Multi-Objective function optimization using non-dominated sorting genetic algorithms.* Evolutionary computation, v.2, n.3, p.221-248, 1995.
- VADENBO, C.; TONINI, D.; ASTRUP, T. F.** *Environmental Multiobjective Optimization of the Use of Biomass Resources for Energy.* Environmental Science e Technology, v.51, n.6, p.3575-3583, 2017.
- ZADEH, L.** *Optimality and non-scalar-valued performance criteria.* IEEE Transactions on Automatic Control, v. 8, n. 1, p.59-60, 1963.
- ZITZLER, E.; THIELE, L.** *Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach.* IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 3, n. 4, p.257–271, 1999.
- ZITZLER, E.; DEB, K.; THIELE, L.** *Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results.* Evolutionary Computation, v. 8, n. 2, p.173-195, 2000.
- ZITZLER, E.; LAUMANN, M.; THIELE, L.** *SPEA 2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm.* Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems, Athens, Greece, p. 95–100, 2002.
- YANG, I.; CHOU, J.** *Multiobjective optimization for manpower assignment in consulting engineering firms.* Applied Soft Computing Journal, v.11, n. 1, p.1183-1190, 2011.