

## Problema de Roteamento de Veículos: um estudo de caso comparando duas abordagens que fazem uso de modelos matemáticos

Júlio César Ferreira (PUCPR) [ferreira.julio@pucpr.edu.br](mailto:ferreira.julio@pucpr.edu.br)  
Maria Teresinha Arns Steiner (PUCPR) [maria.steiner@pucpr.br](mailto:maria.steiner@pucpr.br)

### Resumo:

Para uma organização, o fato de otimizar as operações de seus colaboradores para torná-las mais produtivas é um dos cenários ideais a ser alcançado. O presente artigo tem o objetivo de apresentar duas abordagens para a resolução do Problema de Roteamento de Veículos (PRV), por meio do uso do *Google Maps* e de modelos matemáticos de Programação Linear Inteira Binária (PLIB), mais especificamente PRV e PLF+PCV. Para melhor esclarecer a referida metodologia, fez-se a aplicação da mesma a uma empresa que realiza serviços de entregas rápidas (uma agência de *motoboys*), visando a minimização dos tempos entre os pontos de demanda obtendo-se a maximização de seus lucros e maior satisfação de seus clientes. A empresa será aqui nomeada de ABC e localiza-se no município de Curitiba-PR. A resolução do modelo matemático foi realizada no software LINGO 12.0 (*Language Interactive General Optimizer*), obtendo-se a formação dos *clusters* roteirizados. Foi possível alcançar uma otimização de 57,7% para o tempo nos trajetos analisados em relação a solução atual para uma das abordagens (PRV) e de 33,5% para a outra abordagem (PLF+PCV).

**Palavras chave:** Problema de Roteamento de Veículos (PRV), Problema de Localização de Facilidades (PLF), Problema do Caixeiro Viajante (PCV), Otimização.

## Vehicle Routing Problem: a case study comparing two approaches that make use of mathematical models

### Abstract

For an organization, optimizing the operations of its employees to make them more productive is two of the ideal scenarios to be leveraged. This paper aims to present a approaches for the resolution of Vehicle Routing Problems, using Google Maps and a mathematical model of Linear Integer Binary (PLIB), i.e. VRP and FLP+TSP. To clarify the methodology, it was applied to a company that performs fast delivery services (that is, a motoboys agency), aiming at minimizing the time between demand points by obtaining the maximization of its profits and greater satisfaction of its customers. The company will be named ABC here and is in the municipality of Curitiba-PR. The resolution of the mathematical model was carried out in the software LINGO 12.0 (Language Interactive General Optimizer), obtaining the formation of the scripted clusters ("petals"). It was possible to achieve an optimization of 57.7% for the time the paths analyzed for the current solution to one of the approaches (VRP) and 33.5% for the other approach (FLP + TSP).

**Key-words:** Vehicle Routing Problem (VRP), Facility Location Problem (FLP), Traveling Salesman Problem (TSP), Optimization.

## 1. Introdução

Para uma organização, o fato de otimizar as operações de seus colaboradores para torná-los mais produtivos é um dos cenários ideais a ser alcançado. Neste estudo de caso, há a possibilidade de alcançar este cenário ideal (ou quase) por meio do Problema de Roteamento de Veículos (PRV). Por esta razão, o PRV é amplamente estudado na área de Pesquisa Operacional (PO), além de ser um problema de aplicação prática de fácil entendimento em segmentos como, por exemplo, indústria do petróleo, distribuição ou alimentício. Dantzig e Ramser (1959) são considerados os pais do PRV.

Este artigo tem o objetivo de apresentar uma abordagem que faz uso de modelos matemáticos para a resolução problemas de roteamento de veículos (PRV; de coleta e/ou entrega de mercadorias). Para melhor esclarecer a referida metodologia, fez-se a aplicação da mesma a uma empresa que realiza serviços de entregas rápidas (uma agência de motoboys), aqui denominada de ABC, visando a minimização dos tempos entre os pontos de demanda obtendo-se a maximização de seus lucros e maior satisfação de seus clientes.

Pode-se considerar que a originalidade deste trabalho está na abordagem para solucionar o problema proposto, sob a óptica para a coleta dos dados. Os pesquisadores, normalmente, utilizam as técnicas fazendo uso das menores distâncias (Euclidianas), sendo que aqui foram utilizados os menores tempos reais (e não distâncias), obtidos por meio do *Google Maps*, do trajeto para se adequar à realidade da empresa. Vale destacar que estes tempos são estocásticos. Além disso, para a obtenção dos roteiros, as distâncias (tempos) consideradas que, em geral, são simétricas, foram consideradas aqui como assimétricas.

No presente artigo, a empresa estudada em questão, a ABC, foi fundada em 2008, é uma prestadora de serviço de Entregas Rápidas e Encomendas Expressas que está localizada no bairro chamado “Cidade Industrial de Curitiba” (CIC), no município de Curitiba, PR. Em suas atividades, utiliza motocicletas, utilitários e/ou caminhões. As prestações de serviço ofertadas podem ser classificadas de duas formas: “Rotas Planejadas” e as “Rotas não Planejadas”. As “Rotas Planejadas” são previamente estabelecidas, pois o contratante solicita que a empresa realize entregas periódicas em diversos endereços. Nestes casos são realizadas entregas de notas fiscais, boletos bancários, revistas ou outros. Já as “Rotas não Planejadas” constituem a prestação de serviço mais solicitada, pois as empresas conveniadas contatam a Empresa ABC para realizar a atividade conforme o surgimento de suas necessidades. Estas solicitações podem ser de diversos tipos, tais como realizar pagamento de uma fatura em uma agência bancária ou em casa lotérica ou coletar algum material na empresa solicitante e levá-lo a um ou mais destino(s) específico(s).

Este trabalho ficou restringido na otimização das “Rotas Planejadas” da empresa que possuía 50 clientes na ocasião da pesquisa. O foco deste estudo foi otimizar o tempo do percurso total, ou seja, considerando a soma dos tempos de deslocamento de um endereço a outro, desconsiderando outros tempos (por exemplo, para estacionar e descer da moto). Os serviços de Rotas Planejadas ocorriam na empresa, por ocasião da pesquisa, em cinco dias da semana (de 2<sup>a</sup>. a 6<sup>a</sup>.-feiras).

A Tabela 1 apresenta o cenário atual adotado pela empresa, para uma determinada semana, mostrando os pontos de demanda a serem atendidos a cada dia, além dos respectivos tempos, em minutos, para desenvolver tal atividade. Os percursos de roteirização exercidos foram definidos pelos próprios *motoboys*. Desta forma, tem-se que a atividade levou 615 minutos semanais. A numeração contida em “Roteiros de Entrega” se refere aos clientes e a demanda busca atender cada um deles uma vez por semana. Os tempos (estocásticos), com variação de uma semana para outra de cerca de (aproximadamente 5 minutos), foram coletados por meio

do *Google Maps*, nos mesmos horários de trabalho dos *motoboys*, além de serem validados pelos funcionários da empresa.

| Grupo                   | Roteiros de Entrega                                               | Tempo (min.) |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------|
| 2 <sup>a</sup> . -feira | o - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - o                         | 89           |
| 3 <sup>a</sup> . -feira | o - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 16 - 17 - 18 - 19 - o           | 114          |
| 4 <sup>a</sup> . -feira | o - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26 - 27 - 28 - 29 - 30 - o      | 136          |
| 5 <sup>a</sup> . -feira | o - 31 - 32 - 33 - 34 - 35 - 36 - 37 - 38 - 39 - 40 - 41 - 42 - o | 156          |
| 6 <sup>a</sup> . -feira | o - 43 - 44 - 45 - 46 - 47 - 48 - 49 - 50 - o                     | 120          |
| <b>Total</b>            |                                                                   | <b>615</b>   |

Tabela 1 – Cenário atual com a programação dos roteiros: dados da Empresa ABC

Pode ocorrer de o *Google Maps* apresentar outros roteiros devido ao fluxo do trânsito, acidentes, clima, dentre outros fatores. Sugere-se que os resultados obtidos sejam revistos sempre que a empresa julgar necessário ou a cada dois meses, por exemplo. Na Figura 1 estão ilustrados os 5 roteiros da Tabela 1.

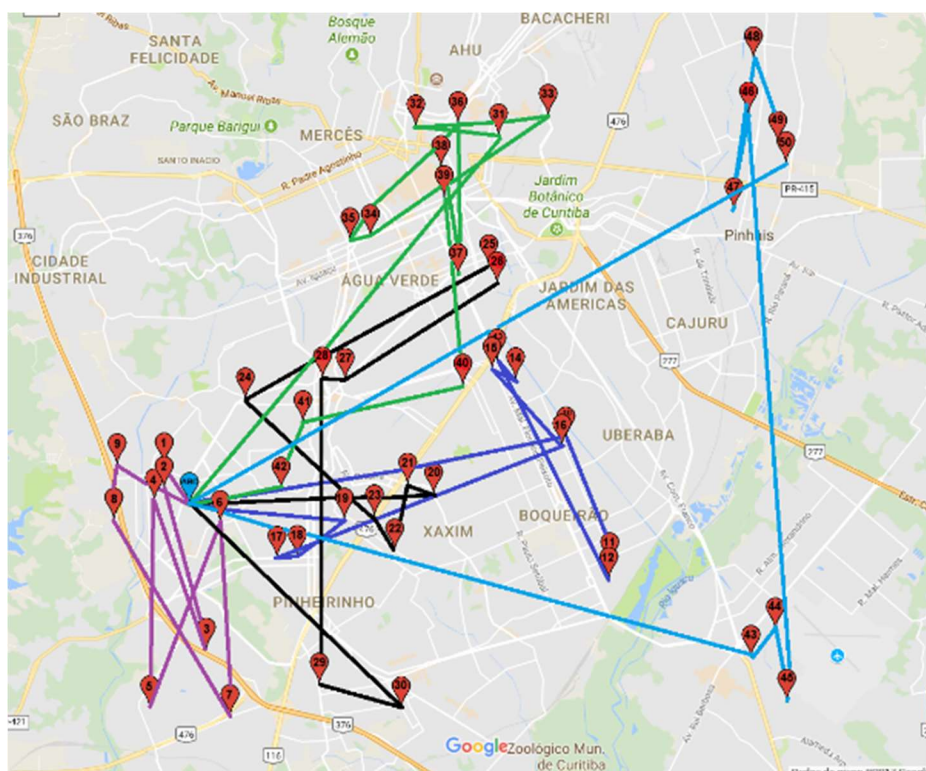


Figura 1 – Roteiros da Solução Atual adotada pela Empresa ABC

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: na seção 2 estão descritas as técnicas utilizadas para a solução do problema proposto e seus referenciais teóricos; na seção 3, a metodologia; na seção 4 a obtenção e discussão dos resultados e, finalmente, na seção 5, as considerações finais deste trabalho.

## 2. Fundamentação teórica

São aqui apresentados o modelo matemático do PRV, do PLF e do PCV e os trabalhos correlatos aos temas.

## 2.1. Problema de Roteamento de Veículos

Segundo Bodin *et al.* (1983), o PRV tem o objetivo de minimizar a distância total percorrida por uma frota, por meio de um conjunto de rotas de entrega que partem de um depósito até pontos de demanda, que possuem requisitos de serviço, e por fim retornam ao depósito central. O PRV considera restrições de capacidade do(s) veículo(s) e possíveis restrições de tempo, número de veículos, entre outras para execução da rota. De forma complementar, Goldbarg e Luna (2005), relatam que o PRV consiste num problema euclidiano ou espacial com aplicações, basicamente, nas áreas de gerenciamento de distribuição e logística, tais como: transporte escolar, distribuição de produtos químicos, recolhimento de lixo, roteamento de linhas aéreas, serviços de emergência, roteamento entre células de manufatura, entre outros.

Entretanto, Arenales *et al.* (2007) representam o PRV por um grafo orientado completo  $G = (N, E)$ , no qual:

$N = C \cup \{0, n+1\}$ ,  $C = \{1, \dots, n\}$  é um conjunto de nós que representam os clientes, e  $\{0, n+1\}$  são os nós que representam o depósito.

$E = \{(i, j)\} : i, j \in N, i \neq n+1, j \neq 0\}$ , são os arcos entre os nós.

- Nenhum arco pode começar no nó  $n+1$ .
- Nenhum nó pode terminar no nó 0.
- Associados a cada arco  $(i, j)$  pertencente a  $E$ , está um custo  $c_{ij}$  e um tempo de viagem  $t_{ij}$ .

Para cada o cliente  $i$ :

- Há um tempo de viagem  $t_{ij}$ .
- Há uma demanda  $d_{ij}$ .

Para o conjunto  $K$  de veículos idênticos:

- Cada veículo  $k \in K$  possui capacidade  $Q$  e está situado no depósito.

Desta forma, feito tal delineamento do PRV, a fim de minimizar o custo total de viagens, admitem-se restrições em que: cada rota inicia e termina no depósito; cada cliente pertence somente a uma rota; a demanda total da rota não deve ultrapassar a capacidade  $Q$  do veículo e o tempo de viagem da rota não deve exceder o limite  $D$ .

Então, a variável  $x_{ijk} = 1$ , se o veículo percorre o arco  $(i, j)$ ,  $\forall k \in K$ ,  $\forall (i, j) \in E$  e  $x_{ijk} = 0$ , caso contrário. A seguir, o PPLIB do PRV de (1) a (9).

$$\text{Min} \quad \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in C \quad (2)$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q, \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} t_{ij} x_{ijk} \leq D, \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0ij} = 1, \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0, \quad \forall h \in C, \quad \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1,k} = 1, \quad \forall k \in K \quad (7)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subset N, 2 \leq |S| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \forall k \in K \quad (8)$$

$$x \in B^{K|E|} \quad (9)$$

Então, a função objetivo em (1) busca minimizar o custo total das rotas percorridas. Em (2), as restrições delimitam que cada cliente  $i$  será designado a um único veículo. Em (3), as restrições fornecem a demanda total de cada rota do veículo  $k$ , que não ultrapassará a capacidade  $Q$  do veículo. Já as restrições em (4) asseguram que a duração da rota do referido veículo não excederá o limite  $D$ . Assim, as restrições (5), (6) e (7) garantem as condições de fluxo em redes, ou seja, determinam que cada veículo  $k$  saia do depósito (nó “0”) uma única vez, “saia” do nó  $h$  somente se entrar neste nó, e retorno ao depósito (nó  $n + 1$ ) somente uma vez. Destaca-se que as restrições (7), apesar de redundantes, são mantidas para ressaltar a estrutura de redes. Por fim, as restrições (8) não permitem a formação de sub-rotas e as restrições (9) determinam o tipo de variável.

Por fim, pode-se observar que quando o número de veículos  $k$ , do modelo citado, for fixo ou um limitante superior igual a  $K$ , o arco  $(0, n+1)$  deverá ser removido. Em contrapartida, se o número de veículos  $k$  é uma variável deve-se atribuir custo alto  $c_v$ , adotando  $c_{0,n+1} = -c_v$ , para minimizar o número de veículos e posteriormente minimizar o custo da viagem (BODIN *et al.* 1983).

## 2.2. Problema de Localização de Facilidades

Para Gandolpho e Pizzolato (2009), o problema das  $p$ -Medianas ou PLF procura localizar  $p$  instalações que fornecem um determinado serviço de modo a minimizar a distância ponderada dos clientes a instalação mais próxima. Este problema é solucionado através do modelo matemático PLIB, conforme (10) a (15).

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_j d_{ij} x_{ij} \quad (10)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i \in N \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = p \quad (12)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad i, j \in N \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 20, \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in N \quad (15)$$

Neste modelo:  $[d_{ij}]_{n \times m}$  é a matriz das distâncias, com  $d_{ij} = 0$ , para todo  $i$ ;  $[x_{ij}]_{n \times m}$  é a matriz de alocação, com  $x_{ij} = 1$  caso o vértice  $i$  estiver alocado ao vértice  $j$ , e  $x_{ij} = 0$ , caso contrário;  $x_{jj} = 1$  caso o vértice  $j$  for uma mediana, e  $x_{jj} = 0$ , caso contrário;  $p$  é o número de medianas a serem localizadas;  $N$  é o conjunto de postos considerados,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $w_i$  refere-se ao peso do vértice  $i$ .

Em (10), a função objetivo busca a distância mínima entre os elementos e a(s) mediana(s); as restrições em (11) e (13) exigem que cada vértice  $i$  seja alocado somente a um único vértice  $j$ . A restrição (12) determina exatamente o número de medianas ( $p$ ); as variáveis em (15) são binárias, assumindo o valor “1” quando pertence a uma mediana e “0”, caso contrário. De forma complementar, a empresa ABC estabeleceu a restrição de que o *motoboy* não pode realizar mais do que 20 entregas por dia de trabalho nesta atividade. Portanto, foi adicionada a restrição (14) ao modelo matemático.

### 2.3. Problema do Caixeiro Viajante

De acordo com Colin (2007), para o modelo matemático do PCV, seja  $G(V, A)$  um grafo, onde  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  é um conjunto de nós e  $A$  um conjunto de arcos. Os nós podem representar cidades e os arcos, os pares ordenados de cidades por meio das quais é possível realizar uma viagem. Para o arco  $(i, j)$  pertencente a  $A$ ,  $c_{ij}$  é o tempo da viagem/trajeto da cidade  $i$  para a cidade  $j$ . O problema em questão é encontrar uma rota que forme um ciclo hamiltoniano, ou seja, que inicie e termine na cidade “1”, que tenha o tempo de viagem mínimo e visite todas as cidades somente uma vez. Considerando que as variáveis  $x_{ij}=1$  representam que a cidade  $j$  foi visitada na sequência da cidade  $i$ ; caso contrário  $x_{ij} = 0$ , tem-se o modelo matemático PLIB para o PCV de (16) a (20), a seguir.

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (16)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

$$\sum_{\{i,j\} \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad (S \subset V) \quad (19)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad (20)$$

Assim, conforme Belfiore e Fávero (2013), a função objetivo em (16) minimiza o tempo total a ser despendido no trajeto. As equações (17) e (18) representam dois conjuntos de restrições, que fazem com que na rota final “entre” apenas um arco em cada nó e que “saia” apenas um arco de cada nó, respectivamente. Em (20), tem-se que as variáveis devem ser binárias. Neste contexto, ao considerar um conjunto de cidades  $S$  (subconjunto do conjunto de cidades do problema  $V$ ) com  $s$  cidades, em que  $2 \leq s < n$ , as inequações em (19) garantem que não haverá a formação de sub-rotas para o conjunto de cidades  $S$ .

### 2.4. Trabalhos correlatos

A seguir são relatados alguns trabalhos relacionados ao problema em pauta, publicado nos últimos anos.

Álvarez e Murani (2015) consideraram as meta-heurísticas baseadas na *Iterated Local Search* (ILS) e *Large Neighborhood Search* (LNS) para resolver o PRV com Janelas de Tempo e Múltiplos Entregadores (PRVJTME). Matsueda *et al.* (2014) realizaram uma seleção de objetivos no PRV com Janelas de Tempo (PRVJT) e o conflito existente entre eles. Os autores utilizaram a Árvore de Agregação para verificar a relação entre os objetivos. Na sequência, foi aplicado o algoritmo *Nondominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II, um algoritmo genético multiobjetivo) para resolver o PRVJT. Por fim, concluíram que a distância total

percorrida pelos veículos, o número de rotas e a violação das restrições de janelas de tempo foram os mais conflitantes.

Dayarian *et al.* (2015) utilizaram um algoritmo *branch-and-price* aplicado ao PRV com multi-período, mais especificamente, delimitaram ao *Multi-Period Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints* (MPESPPRC). Por outro lado, Tas *et al.* (2014) abordaram o PRV dependente do tempo, onde desenvolveram um modelo matemático e duas abordagens meta-heurísticas: a Busca Tabu e *Adaptive Large Neighborhood Search*. Os testes implementados em instâncias da literatura comprovaram a viabilidade das técnicas para problemas reais.

Já Archetti *et al.* (2015), trataram do PRV com data de vencimento, onde o problema incorpora as datas de vencimento para gerar rodas diárias a fim de atender ao problema de forma realística. Sawik *et al.* (2017) apresentam o PRV Verde, com foco na otimização logística verde multi-objetivo. Uma empresa espanhola foi a fonte de dados para este estudo. Entretanto, foi constatado a possibilidade de controlar e limitar as emissões de carbono e ruído e, além da necessidade de considerar as distâncias, tempo de percorrida e diferenças de altitude neste contexto.

Além da aplicações do próprio PRV, têm-se outras publicações com a mesma finalidade como, por exemplo, em Ferreira *et al.* (2017), que utilizaram o Problema de Localização e Facilidades (PLF) e o Problema do Caixeiro Viajante (PCV), com o objetivo de agripar e, na sequência, roteirizar pontos de entrega e coleta. Os autores utilizaram procedimentos exatos e heurísticos.

Lorena *et al.* (2012) apresentam uma abordagem para o *Berth Allocation Problem* (BAP; Problema de Alocação de Berço), aplicado na otimização em terminais marítimos. Os autores modelaram o BAP em caso discreto e propuseram uma nova abordagem para solucioná-lo, onde se baseia no método *Clustering Search* (CS; Pesquisa de Agupamento) por meio do *Simulated Annealing* (AS; Recozimento Simulado).

Battarra *et al.* (2013) trataram do TSPDL (*Traveling Salesman Problem with Draft Limits*; PCV com Limite de Projeto), uma variante do PCV popular no meio do transporte marítimo, devido a restrições sobre as infraestruturas portuárias. Assim, os autores propuseram três formulações matemáticas e compararam os seus desempenhos computacionais.

Por fim, Alem e Toso (2013) apresentaram um projeto exato de planejamento de localização, para reciclagem de resíduos sólidos urbanos, dentro das limitações orçamentárias acordada entre o governo municipal e o Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social, no município de Sorocaba, SP. Concluíram a possibilidade de melhoria sem o envolvimento de custos.

### 3. Metodologia

Nesta metodologia, o *Google Maps* foi utilizado na definição da matriz dos tempos entre os diversos pontos de demanda da empresa ABC. Desta forma, se tornou necessário consultar a relação que cada endereço possui com os demais. Esta ferramenta possibilita consultar a melhor distância a ser percorrida com possibilidade de tempo estimado e a trajetória. Tendo em vista a variação no fluxo de veículos, vale relatar que não há relação entre o tempo para chegar ao percurso e a distância.

Neste contexto deve-se ressaltar que os motociclistas enfrentam problemas de tráfego como semáforos, conversões proibidas à esquerda, locais para estacionar, congestionamentos, vias de sentido único, dentre outros mais.

Para obter as rotas deste problema, recorreu-se no Cenário 1 a formulação matemática do PRV, segundo equações/inequações de (1) a (9). Já para o Cenário 2, recorreu-se a formulação do PLF e do PCV apresentadas de (10) a (15) e (16) a (20), respectivamente. Os três modelos apresentados, conforme visto, tratam-se modelos matemáticos de Programação Linear Inteira Binária (PLIB).

A execução do problema foi realizada por meio do *software* LINGO 12.0 (*Language Interactive General Optimizer*), obtendo-se na primeira abordagem a formação dos *clusters* roteirizados (“pétalas”) para o PRV. Já na segunda abordagem, o primeiro passo foi a clusterização (PLF) e posteriormente a roteirização (PCV). Assim, será realizada a comparação entre a solução adotada pela empresa ABC, com os seguintes procedimentos: PRV *versus* PLF+PCV.

#### 4. Análise dos resultados

A seguir estão as apresentações dos dois cenários para a resolução do problema proposto.

##### 4.1. Cenário 1

No Cenário 1, com a aplicação do PRV, ficaram definidos cinco veículos. A capacidade da motocicleta também ficou estabelecida em até 20 visitas. Esta estratégia teve a finalidade de manter a quantidade de rotas e otimizar as tarefas atualmente realizadas. Com o resultado do *software* LINGO foi verificado que a solução é inviável na prática, pois os roteiros ficaram muito desproporcionais (desbalanceados). A Tabela 2 apresenta os resultados preliminarmente obtidos.

| Grupo        | Roteiros de Entrega                                                                                       | Tempo (min.) |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 2ª. –feira   | o - 1 - 4 - 9 - 8 - 7 - 3 - 5 - o                                                                         | 34           |
| 3ª. –feira   | o - 2 - o                                                                                                 | 2            |
| 4ª. –feira   | o - 6 - 18 - 17 - 29 - 30 - o                                                                             | 25,4         |
| 5ª. –feira   | o - 24 - 28 - 41 - 27 - 37 - 25 - 26 - 23 - 40 - 14 - 10 - 16 - 11 - 12 - 45 - 43 - 44 - o                | 87           |
| 6ª. –feira   | o - 42 - 19 - 22 - 21 - 20 - 15 - 13 - 46 - 48 - 50 - 47 - 49 - 33 - 31 - 36 - 32 - 38 - 39 - 34 - 35 - o | 103          |
| <b>Total</b> |                                                                                                           | <b>251,4</b> |

Tabela 2 – Roteiros inviáveis para o Cenário 1

Por conta disso, a capacidade de entrega da motocicleta foi redefinida para até 12 visitas. A Tabela 3 apresenta os endereços alocados a cada rota e a Figura 2 a sua representação gráfica.

| Grupo        | Roteiros de Entrega                                               | Tempo (min.) |
|--------------|-------------------------------------------------------------------|--------------|
| 2ª. –feira   | o - 2 - 4 - 1 - 9 - 8 - 7 - 5 - 3 - 29 - 30 - o                   | 49           |
| 3ª. –feira   | o - 6 - 42 - 18 - 17 - o                                          | 11,4         |
| 4ª. –feira   | o - 19 - 22 - 21 - 20 - 14 - 10 - 16 - 11 - 12 - 45 - 43 - 44 - o | 66           |
| 5ª. –feira   | o - 23 - 40 - 15 - 13 - 33 - 31 - 36 - 32 - 38 - 39 - 34 - 35 - o | 69           |
| 6ª. –feira   | o - 24 - 28 - 41 - 27 - 37 - 25 - 26 - 46 - 48 - 50 - 47 - 49 - o | 65           |
| <b>Total</b> |                                                                   | <b>260,4</b> |

Tabela 3 – Roteiros do Cenário 1 obtivos pelo PRV

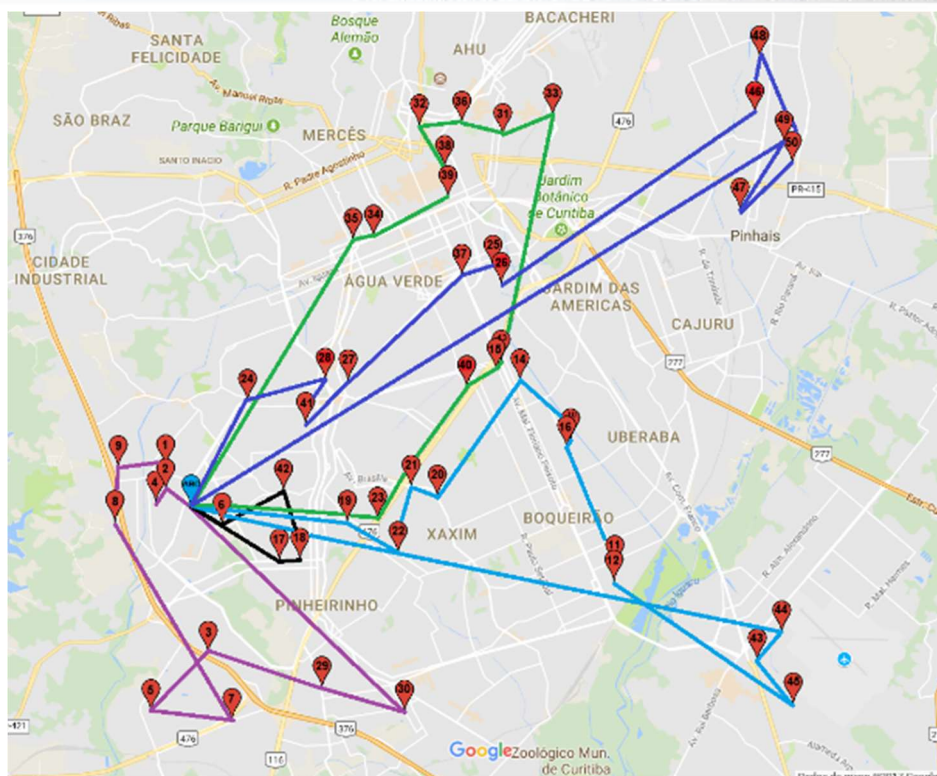


Figura 2 – Roterios do Cenário 2 (obtido pelo PRV)

Entretanto, pode-se observar que o tempo total dos trajetos resultaram em cerca de 260 minutos (49; 11,4; 66; 69; 65 minutos) para o roteamento dos veículos. Assim, a otimização deste processo foi de 57,7% em relação a solução atual. Foi estabelecido que o LINGO não poderia ultrapassar a 10 horas de cálculo, e por conta disso a solução obtida não é a exata, mas sim a melhor solução encontrada dentro deste período de processamento. Para os testes computacionais foi utilizado um notebook com processador Intel i7, 2.7 GHz com 16GB de memória RAM.

## 4.2 Cenário 2

Já para o Cenário 2, também ficaram definidos cinco veículos e a capacidade da motocicleta foi mantida em até 20 visitas. Com o resultado do *software* LINGO foi verificado que a solução é viável na prática. Para este cenário os cálculos tiveram os tempos computacionais instantâneos. A Tabela 4 apresenta os agrupamentos obtidos, a Tabela 5, os endereços roteirizados e a Figura 3 a sua representação gráfica.

| Mediana         | Agrupamento                                          |
|-----------------|------------------------------------------------------|
| 2 (2ª. -feira)  | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 24, 28 e 42.              |
| 16 (3ª. -feira) | 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 23, 26, 40, 43, 44 e 45. |
| 19 (4ª. -feira) | 17, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 29, 30 e 41.             |
| 38 (5ª. -feira) | 25, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 e 39.             |
| 47 (6ª. -feira) | 46, 47, 48, 49 e 50.                                 |

Tabela 4 – Agrupamentos exatos obtidos pelo PLF

| Grupo      | Roteiros de Entrega                                                    | Tempo (min.) |
|------------|------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 2ª. –feira | o - 6 - 42 - 24 - 28 - 1 - 4 - 9 - 8 - 7 - 5 - 3 - 2 - o               | 70           |
| 3ª. –feira | o - 45 - 44 - 43 - 12 - 11 - 16 - 10 - 14 - 15 - 13 - 26 - 23 - 40 - o | 98,4         |
| 4ª. –feira | o - 18 - 17 - 30 - 29 - 22 - 21 - 20 - 19 - 27 - 41 - o                | 71,4         |
| 5ª. –feira | o - 37 - 25 - 33 - 31 - 36 - 32 - 38 - 39 - 34 - 35 - o                | 89           |
| 6ª. –feira | o - 46 - 48 - 50 - 49 - 47 - o                                         | 80           |
| Total      |                                                                        | 408,8        |

Tabela 5 – Roteiros exatos obtidos pelo PCV

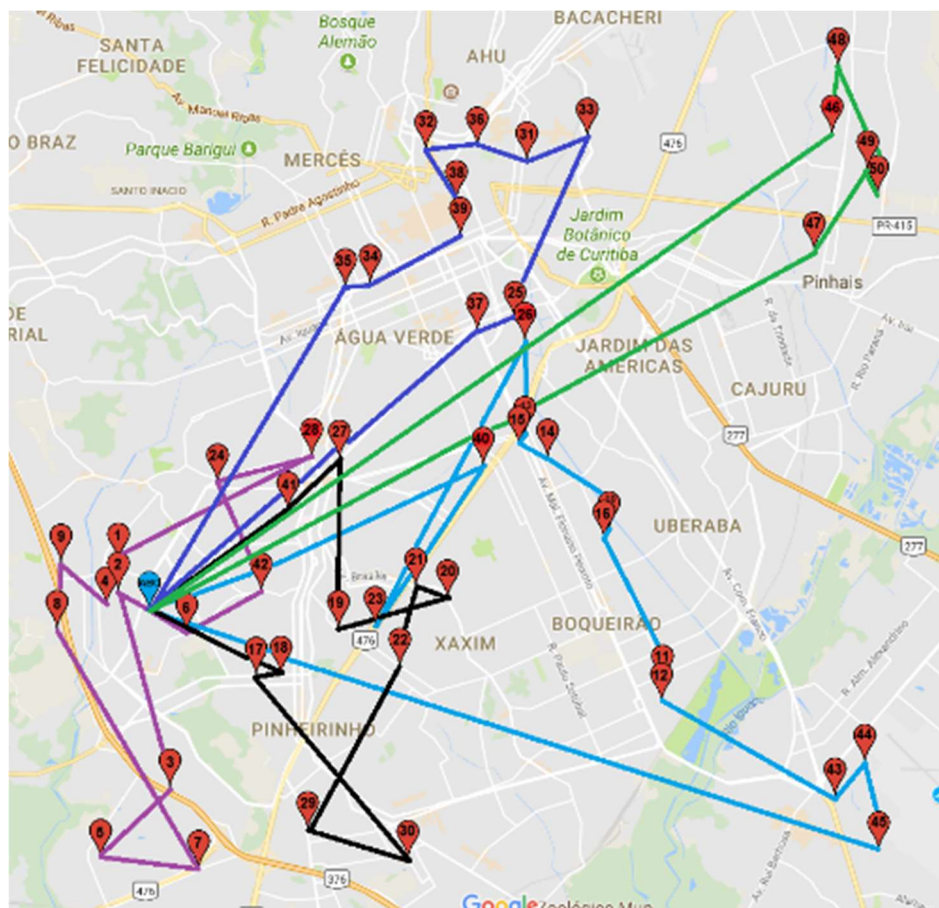


Figura 3 – Cenário 2 (obtido pelo PLF+PCV)

Pode-se observar que o tempo total dos trajetos resultaram em cerca de 408,8 minutos (70; 98,4; 71,4; 89; 80 minutos) para o roteamento dos veículos. Assim, a otimização deste processo foi de 33,5% em relação a solução atual. Vale destacar que os cruzamentos entre as rotas são decorrentes da minimização dos tempos e não das distâncias de percorrida, usualmente utilizadas pelos pesquisadores.

#### 4.3 Discussão dos resultados

A Tabela 6 apresenta de forma resumida os resultados obtidos pelas diferentes abordagens aqui analisadas. Inicialmente a primeira solução do Cenário 1 (inviável) foi desclassificada pois ela apresentou significativo desbalanceamento dos roteiros. Em contra partida, a rota terça-feira do Cenário 2 que contém 13 visitas, não foi desclassificada pois os itinerários deste cenários estavam melhor distribuídos. Não houve a necessidade de refazer os cálculos, visto que os endereços (10) e (16) ou alternativamente (11) e (12) são muito próximos, o que poderiam contabilizar como um único ponto de coleta/entrega.

| Cenário               | Técnica         | Resultado | Otimização (%) |
|-----------------------|-----------------|-----------|----------------|
| Atual                 | Solução vigente | 615       | -              |
| Cenário 1 (reprovado) | PRV inviável    | 251,4     | 59,1%          |
| Cenário 1             | PRV             | 260,4     | 57,7%          |
| Cenário 2             | PLF+PCV         | 408,8     | 33,5%          |

Tabela 6 – Comparação dos resultados

Pode-se observar que a utilização de um único procedimento, no caso o PRV, que resolve todo o problema em uma única etapa teve o tempo computacional mais árduo. Por outro lado, comparativamente, uma abordagem com a utilização de duas técnicas PLF+PCV, contribuíam para um resultado satisfatório em um tempo coputacional de até 6 segundos.

## 5. Considerações finais

Foi aqui abordado um estudo e otimização de um PRV real, mais especificamente, de entrega de mercadorias (envelopes e outros) por uma empresa de *motoboys*. Este artigo buscou dar uma contribuição a aplicação dos problemas que envolvem o uso de técnicas da área de PO.

Para a otimização das atividades da empresa, fez-se uso de duas abordagens exatas: do modelo matemático do PRV e dos modelos matemáticos do PLF+PCV, comparativamente, para a definição dos grupos de atendimento (pontos de demanda) e roteiros a serem percorridos pelos veículos em cada um dos grupos. Desta forma, pode-se alcançar uma otimização de 57,7% para a 1ª. abordagem (PRV) e de 33,5% para a 2ª. Abordagem (PLF+PCV).

Portanto, podemos concluir que este trabalho é mais um *case* no qual pode-se comprovar a grande utilidade das técnicas de PO no processo de tomada de decisões em empresas. Além disso, foi possível compreender o comportamento e as limitações de algumas abordagens diante de aplicações em casos reais.

Em tabalhos futuros, sugere-se que sejam analisadas outras particularidades do PRV com a inclusão de Janelas de Tempo ou do Problema dos Múltiplos Caixeiros Viajantes. Também fica como sugestão o uso de meta-heurísticas, como a Busca Tabu ou Algoritmo Genético, já que para o Cenário 1 não foi possível encontrar a solução do problema com o tempo computacional pré-estabelecido.

## Referências

ALEM, D.; TOSO, E.A.V. *Effective location models for sorting recyclables in public management*. European Journal of Operational Research. Vol. 234, p. 839-860, 2014.

ÁLVAREZ, A.; MUNARI, P. *Abordagens metaheurísticas para o problema de roteamento de veículos com janelas de tempo e múltiplos entregadores*. Gestão e Produção, 2015. Doi.: <http://dx.doi.org/10.1590/0104-530X2359-15>.

ARCHETTI, C.; JABALI, O.; SPERANZA, M.G. *Multi-period Vehicle Routing Problem with Due dates*. Computers & Operations Research. Vol 61, p. 122-134, 2015.

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANESSE, H. *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BATTARRA, M.; PESSOA, A.A.; SUBRAMANIAN, A.; UCHOA, E. *Exact algorithms for the traveling salesman problem with draft limits*. European Journal of Operational Research. Vol. 235, p.115–128, 2014.

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. *Pesquisa Operacional: para cursos de Engenharia*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

**BODIN, L.; GOLDEN, B.; ASSAD, A. & BALL, M.:** *Routing and Scheduling of vehicles and crews: the state of the art*. Special Issue. England: Pergamon Press, 1983.

**COLIN, E.** *Pesquisa operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas*. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

**DANTZIG, G.B.; RAMSER, J.H.** *The truck dispatching problem*. Management Science. Vol. 6, p. 80-91, 1959.

**DAYARIAN, I.; CRAINIC, T.G.; GENDREAU, M.; REI, W.** *A branch-and-price approach for a multi-period vehicle routing problem*. Computers & Operations Research. Vol. 55, p. 167-184, 2015.

**FERREIRA, J.C.; STEINER, M.T.A.; GUERSOLA, M.S.** *A Vehicle Routing Problem Solved Through Some Metaheuristic Procedures: A Case Study*. IEEE América Latina. Vol. 15, n.5, p.943-949, 2017.

**GANDOLPHO, A.A.; PIZZOLATO, N.** *Técnicas de Otimização*. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

**GOLDBARG, M.C.; LUNA, H.P.** *Otimização combinatória e programação linear*. 2 ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

**LINGO SYSTEMS INC.** *LINGO: The Modeling Language and Optimizer*. 2017. Disponível em: <<http://www.lindo.com/downloads/PDF/LINGO.pdf>>. Acessado em 15/09/2017.

**LORENA, L.A.N.; MAURI, G.R.; OLIVEIRA, R.M.** *Clustering Search for the Berth Allocation Problem*. Expert Systems with Applications. Vol. 39, p. 5499-5505, 2012.

**MATSUEDA, L.C.O.; FREITAS, A.R.R.; GUIMARÃES, F.G.** *Seleção de objetivos no problema de roteamento de veículos com janelas de tempo*. XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Salvador-BA, 16 a 19 de Setembro de 2014.

**SAWIK, B.; FAULIN, J.; BERNABEU, E.P.** *A Multicriteria Analysis for the Green VRP: A Case Discussion for the Distribution Problem of a Spanish Retailer*. Transportation Research Procedia. Vol. 22, p. 305-313, 2017.

**TAS, D.; DELLAERT, N.; WOENSEL, T.; KOK, TON.** *The time-dependet vehicle routing problem with soft time Windows and stochastic travel times*. Transportation Research Part C. Vol. 48, p.66-83, 2014.