

## Modelo de otimização combinatória na produção de biomassa em dietas para bovinos

Hugo José Lara Urdaneta (UFSC-Blumenau) [hugo.lara.urdaneta@ufsc.br](mailto:hugo.lara.urdaneta@ufsc.br)

Joyné Contreras (UCLA-Venezuela) [joyncontreras@ucla.edu.ve](mailto:joyncontreras@ucla.edu.ve)

Jinyun Yuan (UFPR- Curitiba) [yuanjy@gmail.com](mailto:yuanjy@gmail.com)

### Resumo:

Propomos um modelo de programação quadrática inteira para determinar uma boa mistura de cultivos de forragem, em produção de alimentação de bovinos. O modelo tem como objetivo obter melhoras nas contribuições de gramíneas e leguminosas para serem usadas como matéria-prima na preparação de rações, maximizando a produção de biomassa na mistura de cultivos, sujeita à limitação do uso de recursos, e um limiar de produção. Además, o modelo determina a quantidade de terra para ser plantada com cada classe de cultivo, planos de irrigação e fertilização, e o tempo de colheita quando a biomassa é máxima.

**Palavras chave:** Programação não linear inteira mista, produção animal, mistura de cultivos de forragem.

## A combinatorial optimization model for biomass production in diets for cattle

### Abstract

We propose an integer quadratic programming model to determine a proper mixture of crops of fodder, in diets for cattle. The objective of our model is to obtain increases in the nutritional contributions of grasses and legumes for use as raw material in the preparation of rations, maximizing the biomass production of the mixture of fodder, subject to a limited use of resources and quality thresholds. Also the quantity of land crop to be cultivated with each kind of fodder, plans of irrigation and fertilization on the horizon of planning, and the time to harvest are determined by the model.

**Key-words:** Mixed integer nonlinear programming, animal farming, mix fodder crops.

### 1. Introduction

A criação de bovinos envolve complexos sistemas produtivos, muito importantes para o desenvolvimento da economia dos países. Muito esforço tem sido investido no estudo desse sistema, e os fatores que o influenciam. Um desses fatores é a eficiência da alimentação, portanto tem sido conduzidos trabalhos para otimizar a alimentação dos bovinos. Desde a década de 1950 (WAUGH, 1951; CHAPPEL, 1974; GLEN, 1974; HOLMAN, 2000; GERVÁSIO, 2010; OLADOKUM, 2012) têm sido desenvolvidos modelos de programação linear para a formulação de dietas para animais. Por certas fraquezas de alguns desses modelos, outros enfoques foram propostos, como uma combinação de programação por objetivos e programação linear, que minimiza o desbalanço de nutrientes na ração final, e minimiza custos de produção. Para ditos modelos, são incorporadas funções de penalidade sobre o desempenho dos bovinos, em função de nutrientes (ADERSON, 1983; REHMAN, 1984; MUNFORD, 1996; ZGAJNAR, 2009 e PRISENK, 2014). Adicionalmente, foram

desenvolvidos trabalhos que incorporam modelos de programação não linear (NLP) centrados na maximização do peso dos animais, ou a produção de leite (GARCÍA, 1998; TEDESCHI, 2005; SAXENA, 2012), com programação linear multiobjetivo, maximizando produção enquanto minimiza custos de produção (CORTÉS, 2008). Ao lado desses estudos que envolvem formulação de rações e nutrição animal, outros problemas relacionados com produção de cultivos têm sido desenvolvidos, com base em modelos de otimização. Problemas de mistura de cultivos (MOHAMED, 2011; ALEXANDER, 2006; HOLMAN, 2000; GARCÍA, 1998; EL SAYED, 2007), planejamento de colheita (JENA, 2013), e planejamento e uso da terra (AGRELL, 2004; VASALLOS, 2010) foram implementados principalmente em programação linear multiobjetivo, programação linear inteira mista, entre outros. Muitos dos estudos tem em comum o uso de dados estáticos na modelagem, evitando otimizar com dados que mudam com o tempo (HOLMAN, 2000; GARCÍA, EL SAYED, 2007 e VASALLOS, 2010). No caso de formulação de rações, alguns trabalhos usam matéria-prima como cereais, subprodutos agroindustriais e alimentos concentrados, que apresentam custos de moderados para altos, juntos com algum forragem (ALEXANDER, 2006; MUNFORD, 1996). Embora o propósito dos problemas de dietas é minimizar o custo, o uso de matéria-prima de baixo custo é limitado motivado em parte à baixa qualidade do forragem, e também ao fato que a informação sobre os requerimentos nutricionais e parâmetros de qualidade, que mudam com o tempo, não são bem tratados; assim como na ausência de informação sobre os parâmetros reais sob os quais o sistema produtivo deve operar para obter o melhor proveito.

Em Contreras, (2016), foi apresentado um modelo de programação não linear inteira na formulação de rações, onde são modeladas com variáveis inteiras decisões relacionadas com o uso de terra para plantar forragem, e o uso dos recursos como água e fertilizantes. As soluções nesse trabalho foram obtidas após a linearização de algumas das relações não lineares, e foi implementado usando programação linear inteira. A ideia deste trabalho refinar o modelo acima, e usar diretamente otimização quadrática em variáveis binárias para a resolução. A ideia é focar na exploração de recursos de baixo custo como forragem, para incorpore-os como matéria-prima em problemas de formulação de rações. Para tal fim, propomos um modelo de programação não linear inteira mista, que considera a informação do desempenho da biomassa, os requerimentos nutricionais e de qualidade de diversas forragens, que mudam com o tempo, com o objetivo de determinar o tempo de colheita na qual a produção de biomassa é maximizado, enquanto a mistura de cultivos alcança limiares nutricionais e de qualidade. Isto involucra a determinação de tipos de cultivos na mistura de forragem, que alcancem certos limiares de qualidade, e a escolha do tempo de colheita adequado para que a biomassa seja maximizada. As restrições impõem os requerimentos de fertilização e de irrigação para as forragens no horizonte temporal, até a colheita, incluindo a disponibilidade de água armazenada, fertilizantes, chuva, características do solo como fertilidade natural, e capacidade máxima de retenção de água.

O resto do artigo é organizado como segue: Na próxima seção é estabelecida a formulação do modelo matemático. Primeiro estabelecemos as classe de dados a usar. Segundo, as variáveis são explicadas e classificadas como contínuas e binárias. Logo, a região factível é construída unindo quatro grupos de restrições. Finalmente, a descrição da função objetivo, que maximiza a produção de biomassa ao momento da colheita. A terceira seção é dedicada à experimentação numérica, onde provamos o modelo em seis ensaios, comparando as resposta dos modelos nas distintas situações iniciais. A última seção contém conclusões do trabalho.

## 2. Formulação do modelo

Na seleção de cultivos de forragem para dietas de bovinos, é desejável maximizar a produção de biomassa que será usada como alimento pelos rebanhos, com a qualidade suficiente que permitam o bom desenvolvimento dos animais, e com restrições no uso dos recursos. Produção de biomassa com alta qualidade é alcançada através de uma adequada combinação de classes de cultivos, escolhidas de entre um conjunto maior de espécies que podem ser cultivadas no local específico, para tratar-los como cultivos conjuntos.

Para escolher o tipo de forragem (gramíneas e leguminosas) para serem cultivadas, devem ser garantidos os requerimentos de água e nutrientes durante o período todo. No entanto, existem certas restrições associadas ao tipo de solo, e os recursos disponíveis para o plantio, que limitam a produção dos nutrientes necessários. Entre outros, podemos mencionar a fertilidade natural do solo, a capacidade máxima de retenção de água e de intercâmbio catiônico do solo, requerimentos de água e de nutrientes de cada classe de forragem, disponibilidade de água para irrigação, previsão das chuvas, disponibilidade de fertilizantes, e a qualidade da biomassa produzida por cada classe de cultivo.

### 2.1. Os dados

Cada espécie de forragem possui uma taxa de crescimento em função do tempo, que indica o peso (biomassa) do cultivo em cada instante. Ademais, a cada classe de forragem são associados requerimentos de irrigação e fertilização, necessários para seu apropriado desenvolvimento. Além disso, cada classe de pasto produz biomassa em quantidade que depende do período de crescimento. Alguns trabalhos (BERROTERAN, 2000; CAB, 2008; GROF, 1970; GUENNI, 2006; JUAREZ, 1999; MARTÍNEZ, 2008; PERALTA, 2007 e SEVILLA, 2004) têm executado experimentos estudando tipos de forragens, nos quais são expressados quantidades como taxas de crescimento, requerimento nutricional, e produção de biomassa como funções contínuas do tempo, caracterizando cada tipo de forragem. Outros trabalhos (FREDERIKSEN, 1980; GONZALEZ, 2011; JOHNSON, 2001, OLIVEIRA, 2007 e PEREZ, 2004) contém tabelas de dados com resultados experimentais dos quais podem ser obtidas correlações empíricas caracterizando classes de cultivo, durante um intervalo de tempo  $I$ . Estas funções proporcionam informações importantes para serem consideradas quando escolhemos o tipo de forragem, e o tempo de colheita.

A ideia central no modelo matemático é determinar uma mistura de classes de pasto ou forragem para serem plantadas, quanto de cada forragem cultivar, e o tempo de colheita, com o objetivo de maximizar a produção de biomassa, alcançando uma qualidade nutricional, e cumprindo as restrições impostas pela situação real.

A seguir estabelecemos notações sobre as funções mencionadas: Sejam  $n$ ,  $Q$  e  $U$  inteiros positivos que representam tipos de pastos, fertilizantes e nutrientes, respectivamente.

$C(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $C_i(t)$  é a função de crescimento do pasto  $i$ , (em  $gr$  ou  $gr/m^2$ ).

$A(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Uma componente  $A_i(t)$  representa os requerimentos de água para pasto  $i$ , (in  $lt/m^2$ ).

$T(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times Q}$ .  $T_{iq}(t)$  é o requerimento de nutrientes (fertilizante)  $q$  para o pasto  $i$  (expressado em  $gr/m^2$ ).

$P(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times U}$ .  $P_{iu}(t)$  produção do nutriente  $u$  pelo pasto  $i$ . É expressado como uma fração do peso do pasto.

Para tratar com as funções contínuas que conformam os dados, dividimos o intervalo de tempo  $I$  em  $N$  pontos de avaliação, cada um representando um instante de tempo. Então definimos um conjunto  $\hat{I}$  que contiene os  $N$  pontos de discretização como segue:

$$\hat{I} = \{t_j : t_j \in I, j = 1, 2, \dots, N\}.$$

As funções contínuas  $C(t)$ ,  $A(t)$ ,  $T(t)$ ,  $P(t)$  são avaliadas em cada ponto discretizado, e então com tais dados constroem-se os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}\hat{C} &= [C(t_1), C(t_2), \dots, C(t_N)] \in \mathbb{R}^{n \times N}, \\ \hat{A} &= [A(t_1), A(t_2), \dots, A(t_N)] \in \mathbb{R}^{n \times N}, \\ \hat{T} &= [T(t_1), T(t_2), \dots, T(t_N)] \in \mathbb{R}^{n \times Q \times N}, \\ \hat{P} &= [P(t_1), P(t_2), \dots, P(t_N)] \in \mathbb{R}^{n \times U \times N}.\end{aligned}$$

Adicionalmente, temos outros conjuntos de dados cujos valores são dados em cada instante de tempo. Ditos conjuntos tem um valor para cada elemento de  $\hat{I}$ , e são definidos como:

$$\begin{aligned}\hat{l} &= [l(t_1), l(t_2), \dots, l(t_N)] \in \mathbb{R}^N, \\ \hat{d} &= [d(t_1), d(t_2), \dots, d(t_N)] \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}\quad (1)$$

O conjunto  $\hat{l}$  contém os dados da chuva, e  $\hat{d}$  os de água para irrigação, em cada instante. A seguir, descrevem-se os dados específicos para serem usados no modelo de programação matemática:

- $S$  área total a ser plantada ( $m^2$ ).
- $sm$  Área mínima para usar em por qualquer classe de forragem ( $m^2$ ).
- $m$  Número máximo de tipos de forragem na mistura.
- $b$  Capacidade de retenção de água do solo ( $lt/m^2$ ).
- $f$  Capacidade de retenção de nutrientes no solo ( $gr/m^2$ ).
- $k_q$  Quantidade de nutrientes de início  $q$  no solo ( $gr/m^2$ ).
- $R_u$  Fração (ou porcentagem de peso) do nutriente  $u$  requerido pela mistura de forragem.
- $g_q$  Disponibilidade total do fertilizante  $q$ , ( $gr$ ).

Para um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  usamos a seguinte notação de arranjo:  $v_i$  é a componente  $i$ -ésima. Para  $J \subset \{1, \dots, n\}$  é o vetor de  $\mathbb{R}^{|J|}$  que contém as componentes de  $v$  com índices em  $J$ . A notação  $i:j$  representa o conjunto  $\{i, i+1, \dots, j\}$ . Por exemplo,  $v_{2:4} = [v_2, v_3, v_4]^T$ . Para arranjos de dimensões maiores, estende-se a notação. Se  $M \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_2 \times k_3}$ , o sub arranjo  $M_{uvw}$  contém as componentes de  $M$  indexadas pelos elementos de  $u, v$  e  $w$ . A notação de pontos aplica para o conjunto completo de índices, por exemplo  $M_{,vw} = M_{1:k_1 vw}$ . O símbolo  $\|M\|_\infty$  para algum arranjo  $M$  é a norma infinito (do máximo) de  $M$ , considerando-os como vetores (concatenados). Por exemplo,  $\|M\|_\infty = \max_{ij} |M_{ij}|$  para  $M \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_2}$  ou  $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$  para o vector  $v$ . Em forma similar, denotamos a norma um do arranjo  $M$  como a soma dos valores absolutos das suas entradas, por exemplo dado um arranjo bidimensional  $M$ ,  $\|M\|_1 = \sum_{i,j} |M_{ij}|$ . O produto interno  $\langle u, v \rangle$  entre dois vetores  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , é definido por  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ .

## 2.2. As variáveis

Dado que desejamos uma combinação adequada dos diferentes cultivos para obter uma biomassa de qualidade, e que os requerimentos de cada forragem varia com o tempo, é suposto que estes devem ser fertilizados e irrigados em quantidades diferentes. Portanto, incluem-se variáveis que determinam as quantidades semanais de irrigação e fertilização, de forma que o desenvolvimento dos pastos até o tempo da colheita. As variáveis são:

$z \in \mathbb{R}$  Valor da função objetivo (*ton.*).

$x \in \mathbb{R}^n$   $x_i$  variável contínua que indica a área a ser plantada com a classe de forragem  $i$  ( $m^2$ ).

$y \in \{0, 1\}^n$   $y_i$  variável binária (0-1) indicando se a forragem  $i$  será cultivada ou não (adimensional).

$\alpha \in \mathbb{R}^{n \times N}$   $\alpha_{ij}$  Variável contínua que indica a quantidade de água que vai ser irrigada na forragem  $i$  ao tempo  $t_j$  ( $lt/m^2$ ).

$\beta \in \mathbb{R}^{n \times Q \times N}$  Arranjo de variáveis contínuas  $\beta_{iqj}$  é uma variável contínua que indica a quantidade de fertilizante  $q$  a ser aplicado à forragem  $i$  ao tempo  $t_j$  ( $gr/m^2$ ).

$\tau \in \{0, 1\}^N$   $\tau_j$  Variável binária que indica o tempo ótimo da colheita (adimensional).

$\delta \in \{0, 1\}^N$   $\delta_j$  Variável binária usada para rotular os tempos após a colheita (e evitar o uso de recursos).

### 2.3. Região factível

A seguir estabeleceremos as restrições que definem a região factível de nosso modelo de otimização. Algumas das restrições são definidas para um instante fixo  $t_j$ ,  $j \in \hat{I}$ . A medida que o tempo avança, o número de restrições que definem a região factível aumenta. A cada instante  $t_j$  devem verificar-se tanto as restrições atuais, quanto as anteriores. Isto faz com que os requerimentos de crescimento para os pastos sejam garantidos desde o início até o tempo atual. As restrições se formulam desde o ponto de vista físico do problema, e são válidas sempre as precipitações sejam menores do que a capacidade de retenção do solo.

O conjunto de restrições do modelo será mostrada em quatro partes:

1. Restrições de tipos de pasto e superfícies.

$$smy \leq x \leq Sy. \quad (2)$$

$$\|x\|_1 \leq S. \quad (3)$$

$$\|y\|_1 \leq m. \quad (4)$$

Em (2) são estabelecidas cotas inferiores e superiores sobre as áreas a serem plantadas com uma forragem selecionada  $i$ . A superfície total a ser plantada se estabelece em (3). A restrição (4) impõe uma cota superior sobre a quantidade de tipos de forragens que podem ser escolhidas.

2. Restrições sobre água.

$$\|\alpha_i\|_\infty \leq by_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

$$\|\alpha_{i1:j}\|_1 \geq (\|A_{i1:j}\|_1 - \|l_{1:j}\|_1)y_i \quad \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

$$\alpha_{.1} \leq be - l_1. \quad (7)$$

$$\|\alpha_{i1:j}\|_1 \leq b + \|A_{i1:j-1}\|_1 - \|l_{1:j}\|_1 \quad \forall i, j > 1. \quad (8)$$

$$\alpha_{.1:j}^T x \leq d_{1:j} + \delta_j M_1 e_{1:j} \quad \forall j. \quad (9)$$

onde  $M_1$  é uma cota superior para as componentes de  $d$ , e  $e \in \mathbb{R}^n$  é o vetor cujas entradas são igual a um. Em (5) é estabelecida uma cota superior para cada componente de  $\alpha_i$ , enquanto que (6) carrega a irrigação acumulada no tempo, para o pasto  $i$ , e para a mistura escolhida, assegurando que os requerimentos de água sejam satisfeitos. As restrições (7) e (8) tomam em consideração a capacidade de retenção de água do solo, para estabelecer a cota superior sobre a irrigação acumulada. Isto depende das precipitações acumuladas e dos requerimentos de água através do tempo. A restrição (9) limita a quantidade de água à disponível cada semana. Dado que  $\delta_j = 1$  após o tempo de colheita, temos que para os tempos posteriores  $j$ , as restrições perdem seu efeito sobre o problema.

### 3. Restrições de fertilização

$$\|\beta_{i..}\|_{\infty} \leq f y_i \quad \forall i. \quad (10)$$

$$\|\beta_{iq1:j}\|_1 \geq (\|T_{iq1:j}\|_1 - k_q) y_i \quad \forall i, j \text{ and } q. \quad (11)$$

$$\|\beta_{i..1}\|_1 \leq f - \|k\|_1 \quad \forall i. \quad (12)$$

$$\|\beta_{i..1:j}\|_1 \leq f - \|k\|_1 + \|T_{i..1:(j-1)}\|_1 \quad \forall i, j > 1. \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n \|\beta_{iq1:j}\|_1 x_i \leq g_q + \delta_j M_2 \quad \forall q, \forall j. \quad (14)$$

Cotas superiores para cada componente de  $\beta_{iqj}$  são estabelecidas em (10). Tais restrições indicam que os fertilizantes de cada nutriente, em cada etapa, não podem exceder a capacidade de intercâmbio catiônico do solo. Em (11) os requerimentos nutricionais para cada pasto  $i$  em cada etapa  $j$  são satisfeitos, assim como cotas inferiores para a acumulação de fertilizantes do nutriente  $q$  para cada forragem e cada etapa. Em (12) se estabelece uma cota superior para todos os fertilizantes no início  $j = 1$ . Entretanto, em (13) se considera a acumulação de nutrientes no solo, tanto quanto a absorção pelas plantas, para evitar a extravasar a capacidade de intercâmbio catiônico do solo. A restrição não linear (14) faz referência à disponibilidade de cada classe de nutriente para ser aplicado sobre a superfície completa a ser cultivada.

### 4. Restrições de qualidade.

$$\langle \tau, (P_{.u.} - R_u I) \hat{C}^T x \rangle \geq 0 \quad \forall u. \quad (15)$$

$$\|\tau\|_1 \leq 1. \quad (16)$$

$$\delta_1 = 0. \quad (17)$$

$$\delta_{j+1} = \delta_j + \tau_j \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (18)$$

Com as restrições (15) e (16) se assegura que a mistura possui a qualidade desejada no momento da colheita escolhido. As restrições (17) e (18) permitem que as limitações na disponibilidade de água para irrigação, e fertilizantes depois do tempo da colheita não tenha influência no modelo de otimização.

## 2.4. Função Objetivo

A função objetivo maximiza a produção de biomassa de uma mistura de forragens no tempo da colheita. Nesta proposta é determinada não só a combinação e a quantidade de pastos para serem plantados, mas também o tempo e colheita no qual a máxima produção de biomassa é alcançada, enquanto os requerimentos são satisfeitos. Usamos a notação de produto interno para definir a função objetivo como:

$$z = \max \langle \tau, \hat{C}^T x \rangle.$$

Desde o ponto de vista físico do problema, no todos os instantes são adequados para a colheita. Só são adequados os momentos nos quais as propriedades de qualidade alcançam o patamar desejado. Por (16) a semana quando será efetivada a colheita se determina pela única componente positiva  $\tau_{\hat{j}}$  onde  $\hat{j} \in \{1, \dots, N\}$ . O resto dos valores desta variável são nulos. Isto assegura que a biomassa é calculada só na semana da colheita, isto é

$$z = \max \sum_{i=1}^m \hat{C}_{i\hat{j}} x_i.$$

### 3. Resultados numéricos e discussão

A proposta apresenta um modelo de otimização não linear inteira mista, com uma função objetivo não linear, e restrições lineares e não lineares. Os experimentos numéricos, constroem-se com 266 variáveis, 21 delas binárias. O modelo tem 914 restrições das quais 88 são não lineares. O modelo foi implementado no ambiente de GAMS (General Algebraic Modelling System; ROSENTAL, 2015), usando os solvers DICOP, CNOPT e CPLEX.

Os dados de superfície total,  $S$ ; a superfície mínima para ser cultivada por uma classe de forragem,  $sm$ ; o número máximo de tipos de forragem na mistura,  $m$ ; a capacidade de retenção de água no solo,  $b$ ; a capacidade máxima de retenção de nutrientes,  $f$ ; a quantidade inicial de nutrientes no solo,  $k_q$ ; a disponibilidade de água para irrigação em cada semana,  $d_j$ ; a disponibilidade de fertilizantes,  $g_q$ ; e a qualidade desejada da mistura,  $R_u$ , foram dadas pelo usuário (autor). Em todos os experimentos numéricos foi considerada a condição (1). Como consequência, os dados relacionados a pronóstico de precipitações são baixos, ou nulos. Foram usado 5 tipos de forragens nos experimentos: *Cynodon dactylon*, *Pennisetum spp*, *Pennisetum purpureum*, *Leucaena leucocephala*, e *Desmodium ovalifolium*. O horizonte temporal foi dividido em 6 semanas ( $j$ ); enquanto 5 fertilizantes ( $q$ ): nitrogênio, potássio, fósforo, cálcio, e magnésio. A qualidade da mistura mede-se com a produção nutricional ( $u$ ) de: proteínas, energia, cálcio, fósforo e fibra.

Foram rodados 6 ensaios numéricos para testar o modelo. Os parâmetros de entrada usados no primeiro é mostrado na tabela 1. Baseados neste ensaio, o segundo apresenta uma variação nos parâmetros de entrada, com o objetivo de comparar as saídas. Os resultados de cada experimento são apresentados na tabela 2.

|                |              |                                  |               |               |
|----------------|--------------|----------------------------------|---------------|---------------|
| $S$            | $b$          | $sm$                             | $f$           | $m$           |
| 100000 $m^2$   | 200 $lt/m^2$ | 0.1 * $S$ $m^2$                  | 200 $gr/m^2$  | 3             |
| $k_1$          | $k_2$        | $k_3$                            | $k_4$         | $k_5$         |
| 5 $gr N_2/m^2$ | 3 $gr K/m^2$ | 1.5 $gr P/m^2$                   | 4 $gr Ca/m^2$ | 1 $gr Mg/m^2$ |
| $g_1$          | $g_2$        | $g_3$                            | $g_4$         | $g_5$         |
| 20000 $gr N_2$ | 16000 $gr K$ | 18000 $gr P$                     | 10000 $gr Ca$ | 10000 $gr Mg$ |
| $R_1$          | $R_2$        | $R_3$                            | $R_4$         | $R_5$         |
| 11.5 % protein | 2.5 $cal/gr$ | 0.07 % Ca                        | 0.035 % P     | 75 % fiber    |
| $l^j$          |              | 0 $lt/m^2$ in each $j$           |               |               |
| $d^j$          |              | $6 \times 10^8$ $lt$ in each $j$ |               |               |

Tabela 1: Parâmetros fixados para ensaio 1.

A seguir apresentamos as características de cada ensaio:

1. [Ensaio 1.] Os dados vem da tabela 1.

2. [Ensaio 2.] Muda o valor da disponibilidade de água para irrigação, decrescendo para  $d^j = 5.1 \times 10^6$  em cada j. O resto dos parâmetros coincide com os iniciais.
3. [Ensaio 3.] Mantemos os mesmos dados do ensaio 2, mas adicionamos dados de chuva:  $l^8 = [10, 50, 20, 30, 20, 20, 20, 20] \text{ lt/m}^2$ .
4. [Ensaio 4.] O quarto ensaio também usa os dados da tabela 1, excepto pelas condições iniciais do solo, que muda para

| Initial condition of nutrients in the soil |                       |                        |                         |                         |
|--------------------------------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $k_1$                                      | $k_2$                 | $k_3$                  | $k_4$                   | $k_5$                   |
| 1.1 gr $N_2/\text{m}^2$                    | 0.5 gr $K/\text{m}^2$ | 0.35 gr $P/\text{m}^2$ | 0.75 gr $Ca/\text{m}^2$ | 0.15 gr $Mg/\text{m}^2$ |

5. [Ensaio 5.] Agora pede-se à mistura o uso de uma classe específica de forragem (fixamos a segunda forragem). Os outros parâmetros são mantidos.
6. [Ensaio 6.] No último ensaio altera-se a qualidade desejada da mistura, mantendo o remanente dos parâmetros. Os novos dados de qualidade são:

| Quality in the mixture |             |           |          |              |
|------------------------|-------------|-----------|----------|--------------|
| $R_1$                  | $R_2$       | $R_3$     | $R_4$    | $R_5$        |
| 13 % protein           | 2.65 cal/gr | 0.09 % Ca | 0.07 % P | 70.5 % fiber |

| Ensaio | Biomassa | Semana de colheita | Mistura | Área plantada               | Plano de irrigação                                                                                                        | Plano de fertilização |
|--------|----------|--------------------|---------|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1      | 426.540  | 7                  | 1 e 4   | 71487.86 e 28512.14         | $a1=(200.0, 83.5, 85.50, 86.50, 87.50, 75.50, 0)$ $a4=(200.0, 77.0, 79.0, 80.0, 81.0, 56.0, 0)$                           | não necessário        |
| 2      | 239.893  | 7                  | 1 e 5   | 40521.28, e 20031.92        | $a1=(84.58, 89.79, 93.64, 90.56, 73.92, 92.50, 93.50)$ $a5=(83.46, 72.97, 65.17, 71.89, 105.07, 67.47, 65.45)$            | não necessário        |
| 3      | 305.952  | 7                  | 1 e 4   | 51277.26 e 20451.37         | $a1=(73.50, 69.98, 92.02, 77.50, 99.50, 92.50, 93.50)$ $a4=(109.08, 117.91, 62.65, 99.05, 43.90, 61.45, 58.94)$           | não necessário        |
| 4      | 426.540  | 7                  | 1 e 4   | 71487.86 e 28512.14         | $a1=(200.0, 83.5, 85.50, 86.50, 87.50, 75.50, 0)$ $a4=(156.0, 0, 200.0, 80.0, 81.0, 56.0, 0)$                             | ver tabela 3          |
| 5      | 303.541  | 5                  | 1,2 e 3 | 17818.17, 72181.83, e 10000 | $a1=(200.00, 83.50, 85.50, 86.50, 87.50)$ $a2=(200.0, 200.0, 86.0, 88.0, 89.0)$ $a3=(200.00, 200.00, 86.50, 88.50, 89.5)$ | não necessário        |
| 6      | 238.555  | 5                  | 1 e 5   | 81066.86, e 18933.14        | $a1=(200.00, 83.50, 85.50, 86.50, 87.50)$ $a5=(200.00, 79.99, 72.99, 73.99, 74.99)$                                       | não necessário        |

Tabela 2: Resultados dos 6 ensaios.

O primeiro ensaio é referência para comparações. Este apresenta uma disponibilidade relativamente alta de fertilizantes, y água para irrigação, e requer um padrão de qualidade médio. O resultado da otimização escolhe uma mistura de dois tipos de forragem, Cynodon dactylon e Leucaena leucocephala, mostrando um bom desempenho em produção de biomassa cada semana, enquanto a mistura cumpre os requisitos de qualidade desde a semana 4 à 7. O pico na produção de biomassa foi a semana 7. Foi decidido plantar a superfície disponível completa. Um plano de irrigação por semana é calculado, evitando sobrepassar a

capacidade de retenção de água do solo, e por último, como a condição inicial de nutrientes no solo é suficientemente boa, então as variáveis que indicam a quantidade de fertilizantes a serem aplicados oferecem valor zero, o que indica que não é necessária a fertilização.

A solução para o segundo ensaio mostra como o modelo responde a um déficit drástico na disponibilidade de água. A nova mistura usa *Cynodon dactylon* e *Desmodium ovalifolium*, e faz a colheita na mesma semana 7. Como resultado da falta de água, o modelo decide por plantar uma quantidade menor de superfície (39.45%), dando também uma menor produção de biomassa (43.76%). Os valores de fertilização ainda são nulos.

O terceiro ensaio mostra a resposta quando há chuva. A escolha dos tipos de forragem, e o tempo da colheita coincidem com o ensaio 1, mas a superfície total a ser plantada cresce em 18,6%. A produção de biomassa também aumenta, em 27,54%. Os planos de irrigação e fertilização são calculados (destacando que ainda a fertilização não é necessária).

No quarto ensaio, o modelo responde à variação da condição inicial de nutrientes no solo, que é pior do que nos ensaios anteriores. Destaca que na resposta, o modelo faz um plano (não nulo) de fertilização semanal, para compensar as deficiências do solo.

| Fertilizante   | <i>Cynodon dactylon</i> (1)           | <i>Leucaena leucocephala</i> (4)  |
|----------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| Nitrogênio (1) |                                       | (0.701, 0, 0, 0, 0, 0, 0)         |
| Potássio (2)   | (0, 0, 0, 0, 0.033, 0.067, 0.009)     | (0, 0, 0, 0, 0.043, 0.034, 0.045) |
| Fósforo (3)    | (0, 0, 0, 0.039, 0.043, 0.103, 0.008) | (0.351, 0, 0, 0, 0, 0, 0)         |
| Cálcio (4)     |                                       | (0.701, 0, 0, 0, 0, 0, 0)         |
| Magnésio (5)   |                                       | (0.351, 0, 0, 0, 0, 0, 0)         |

Tabela 3: Planos de fertilização semanais nas duas variedades escolhidas no ensaio 4.

Quando, no ensaio 5, é fixado o uso de uma forragem particular (*Pennisetum* spp.), o modelo responde incorporando um número maior de tipos de pasto (3 em total), e reduzindo o tempo da colheita. A produção de biomassa neste caso é menor do que no ensaio 1 de referência.

No sexto ensaio é requerida melhor qualidade da mistura, mantendo os outros parâmetros. A mistura escolhida inclui *Cynodon dactylon* e *Desmodium ovalifolium*, e antecipa a colheita para semana 5. Nesta semana, a segunda forragem mostra melhor qualidade do que a primeira, porém pouca produção. No entanto, a baixa biomassa é compensada pelo uso de *Cynodon dactylon*, cuja qualidade é média, mas sua biomassa é maior.

#### 4. Conclusões

Com o modelo de otimização combinatória proposto revisamos vários cenários de produção sob parâmetros similares, mas com distintos estágios fisiológicos dos cultivos. Ao considerar as mudanças nos dados associados às forragens (Biomassa, qualidade de requerimentos) e avaliando-os nos diferentes tempos de colheita potenciais, em lugar de fixa-los como dados, obtemos respostas coerentes.

Ao incorporar as restrições associadas ao solo, como fertilidade natural, capacidade máxima de retenção de água e capacidade de intercâmbio catiônico, pode ser feito melhor controle sobre os recursos, e nos aproximar à realidade do problema de cultivos.

Tratar irrigação com dados conjuntos de pronóstico de precipitações, e disponibilidade da água permite tomada de decisões não triviais como a de o uso de uma quantidade menor de área para ser cultivada.

As soluções dadas pelo modelo, además de proporcionar respostas sobre as classes de cultivos, e as superfícies a serem plantadas, calcula o tempo próprio para fazer a colheita, e proporciona planos para uso ótimo de recursos como irrigação e fertilização

Obtemos um plano de produção para a mistura de forragens que contêm qualidade nutricional boa e conhecida, para ser usada como matéria-prima na produção de uma ração para animais.

### **Agradecimentos**

O trabalho foi parcialmente patrocinado pelo CAPES/IMPA enquanto o primeiro autor visitava o Departamento de Matemáticas da UFPR, Curitiba, Brasil.

### **Referências**

ALEXANDER, D. L.; MOREL, P. C.; WOOD, G. R. *Feeding strategies for maximising gross margin in pig production*. Global Optimization: Scientifics and Engineering Case Studies, Vol 3 n. 1, p 14-20, 2006.

ADERSON, A.; EARLE, M. *Diet planning in the third world by linear and goal programming*. The Journal of Operational Research Society, Vol 34, n. 9-16, 1983.

AGRELL, P. J.; STAM, A.; FISCHER, G. *Interactive multiobjective agro-ecological land use planning: The Bungoma region in Kenya*. European Journal of the Operational Research, O.R. Applications, Vol 158, p194-217, 2004.

BERROTERÁN, J. *Modelo de utilización Cereal-pasto en sistemas de Producción de Sabanas Bien Drenadas con suelos ácidos en Venezuela*. Interciencia, Vol 25, n. 4, 2000.

CAB, F.; ENRIQUEZ, J.; PÉREZ, J.; HERNÁNDEZ, A.; HERRERA, J.; ORTEGA, E.; QUERO, A. *Potencial Productivo de Tres Especies de Brachiaria en Monocultivo y Asociadas con Arachis Pintoi en Isla, Veracruz*. Técnica Pecuaria en México, Vol 46, n. 3, p317-332, 2008.

CHAPPEL, A. E. *Linear programming cuts costs in production of animal feeds*. Operational Research Quarterly, Vol 25, n. 1, p19-26, 1974.

CONTRERAS, J.; LARA, H.; NOUEL-BORGES, G. *A mixed integer nonlinear programming model for biomass production*. Oper Res Int J, 2016, <https://doi.org/10.1007/s12351-016-0283-4>.

CORTÉS, M. E.; SÁNCHEZ, T. M. *Modelo Lineal Multiobjetivo para la Toma de Decisiones en Alimentación del Ganado*. Revista Investigación Operacional, Vol 9, n. 1, p5-9, 2008.

EL SAYER ABDEL ASIS, M. H. *Parametric and multiobjective optimization applied in agriculture: The study of cropping pattern in the Ameriya region in winter crops*. Revista Investigación Operacional, Vol 28, n. 1, p17-24, 2007.

FREDERIKSEN, J.; KATEGILE, J. *The Effect of Nitrogen Fertilization and Time of Cutting in First Growth in Brachiaria Brizantha on Yield, Crude Protein Content and in vitro Digestibility*. Trop. Anim. Prod., Vol 5, n. 2, 1980.

**GARCÍA, A.; RODRIGUEZ, J.J.; RUIZ, D. M.** *Optimización del Engorde de Bovinos en Pastoreo en la Pampa Argentina Mediante Programación Lineal.* Invest. Agr.: Prod. Sanid. Anim., Vol 13, n. 1, 2 y 3, p99-117, 1998.

**GERVÁSIO DE OLIVEIRA, J.; BATISTA, J.; BARIONI, L.; GONÇALVES, G.; BRAGA, A.; ESPELLET, M.** *Optimized feed planning for a grazing horse production systems,* Revista Brasileira de Zootecnia, Vol. 39, n. 4, p932-940, 2010.

**GLEN, J. J.** *A Linear programming model for an Integrated Crop and Intensive Beef Production Enterprise.* The Journal of the Operational Research Society, Vol. 37, n. 5, p487-494, 1974.

**GONZÁLEZ, I.; BETANCOURT, A.; FUENMAYOR, A.; LUGO, M.** *Producción y composición química de forrajes de dos especies de pasto Elefante (Pennisetum sp.) en el Noroccidente de Venezuela.* Zootecnia Trop, Vol 29, n. 1, p103-112, 2011.

**GROF, B.; HARDING, W.** *Dry Matter Yields and Animal Production of Guinea Grass (Panicum maximun) on the Humid Tropical Coast of North Queensland.* Tropical Grassland, Vol. 40, n. 1, 1970.

**GUENNI, O.; GIL, J.; BARUCH, Z.; Márquez, L.; NUÑEZ, C.** *Respuestas al D\eficit H\ídrico en Especies Forrajeras de Brachiaria (TRIN.) GRISEB. (POACEAE).* Interciencia, Vol. 31, n. 007, p505-511, 2006.

**HOLMAN, F.** *El Uso de Modelos de Simulación como Herramienta para la Toma de Decisiones en la Promoción de Nuevas Alternativas Forrajeras: El Caso de Costa Rica y Perú,* XVI Reunión Latinoamericana de Producción Animal (ALPA), 2000.

**JENA, S.; POGGI, M.** *Harvest planning in the Brazilian sugar cane industry via mixed integer programming.* European Journal of the Operational Research, Innovative Applications of O.R., Vol. 230, p374-384, 2013.

**JOHNSON, C.; REILING, B.; MISLEVY, P.; HALL, M.** *Effects of nitrogen fertilization and harvest date on yield, digestibility, fiber, and protein fractions of tropical grasses.* J Anim Sci, Vol. 79, p2439-2448, 2001.

**JUAREZ, F.; FOX, D.; BLAKE, R.** *Evaluation of Tropical Grasses for Milk Production by Dual-Purpose Cows in Tropical Mexico.* J Dairy Sci., Vol 82, p2136-2145, 1999.

**MARTÍNEZ, D.; HERNÁNDEZ, A.; ENRÍQUEZ, J.; PÉREZ, J.; GONZÁLEZ, S.; HERRERA, J.** *Producción de forraje y componentes del Rendimiento del Pasto Brachiaria Humidicola Ciat 6133 con diferente Manejo de la Defoliación.* Técnica Pecuaria en México, Vol. 46, n. 004, p427-438, 2008.

**MOHAMAD N. H.; SAID, F.** *A mathematical programming approach to crop mix problem.* Técnica Pecuaria en México, Vol. 46, n. 004, p427-438, 2011.

**MUNFORD, A.** *The use of iterative linear programming in practical applications of animal diet formulation.* African Journal of Agricultural Research, Vol. 6, n. 1, p191-197, 1996.

**OLADOKUN, V. O.; JOHNSON, A.** *Feed Formulation Problem in Nigerian Poultry Farms: a mathematical programming approach.* American Journal of Scientific and Industrial Research, Vol. 3, n. 1, p14-20, 2012.

**OLIVERA, Y.; MACHADO, R.; DEL POZO, P.M RAMÍREZ, J.; CEPERO, B.** *Evaluación de accesiones de Brachiria brizanta en suelos ácidos. Época de máximas precipitaciones.* Pastos y Forrajes. Vol. 30, n. 3, 2007.

**PERALTA, J.; CARRILLO, S.; HERNÁNDEZ, H.; PORFIRIO, N.** *Características morfológicas y productivas, en etapa de producción, para ocho gramíneas forrajeras tropicales.* APPA-ALPA-Cusco, Perú (2007).

**PÉREZ, J.; GARCÍA, E.; ENRIQUÉZ, QUERO, R.** *Análisis de crecimiento, área foliar específica y concentración de nitrógeno en hojas de pasto 'mulato' (Brachiaria híbrido, cv.).* Técnica Pecuaria en México, Vol. 42, n. 003, p447-458, 2004.

**PRISENK, J.; TURK, J.; ROZMAN C.; BOREC, A.; ZRAKIC, M.; PAZEK, K.** *Advantages of combining linear programming and weighted goal programming for agriculture application.* Operational Research International Journal Vol. 14, n. 2, p253-260, 2014.

**REHMAN, T.; ROMERO, C.** *Goal programming with penalty functions and livestock ration formulation.* Agricultural Systems Vol. 23, p117-132, 1987.

**SAXENA, P.** *Comparision of Linear and Nonlinear Programming Techniques for Animal Diet.* Applied Mathematics, Vol. 1, n. 2, p106-108, 2011.

**SAXENA, P.; PATHAK, V.** *Application of Nonlinear Programming for Optimization of Nutrient Requirements for Maximum Weight Gain in Buffaloes.* International Journal of Food Science and Nutrition Engineering, \Vol. 1, n. 1, p8-10, 2011.

**SAXENA, P.; PATHAK, V.; KUMAR, V.** *Programming Technique for Animal Diet Formulation: A Non-linear Approach,* International Journal of Food Science and Nutrition Engineering, Vol. 2, n, 5, p85-88, 2012.

**SEVILLA, G.; PASINATO, A.; GARCÍA, J.** *Curvas de crecimiento de forrajeras templadas irrigadas,* Arch.Latinoam. Prod. Anim., Vol. 9, n. 2, p91-98, 2001.

**ROSENTAL, R** *GAMS-A user's guide,* GAMS Development Corporation, Washinton DC. USA, 2015.

**TEDESCHI, I. O.; FOX, D. G.; SAINZ, R. D. BARIONI, L. G. RAPOSO DE MEDEIROS, S.; BOIN, C.** *Mathematical Models in Ruminant Nutrition.* Sci. Agric., \Vol. 62, n. 1, p76-91, 2005.

**VASSALOS, M.; DILLON, D.; FRESHWATER, D.; KARANIKOLAS, P.** *Modeling multifunctionality of agriculture at a farm-level: The case of Kerkini District, Northern Greece.,* Applied Studies in Agribusiness and Commerce. Budapest, p59-64, 2010.

**WAUGH, F. V.** *The minimum-cost dairy feed},* Journal of Fram Economics, Vol. 33, p299-310, 1951.

**ZGAJNAR, J.** *Combination of linear and weighted goal programming with penalty function in optimisation of a daily cow ration.* Agricultural Economics-Czech, Vol. 55, n. 10, p492-500, 2009.