

Pesquisa Operacional Aplicada na Maximização da Receita de um Centro Educacional

Flavio Henrique Alves Agrizzi (Faculdades Integradas Espírito-Santenses) flavioagrizzi@gmail.com
Diego Siqueira Menezes (Faculdade Brasileira MULTIVIX - Vitória) diegosiqueiramenezes@hotmail.com
Igor Tureta Zanquetta (Universidade Federal do Espírito Santo) igortz-10@hotmail.com
Adan Lucio Pereira (Universidade Federal do Espírito Santo) adanlucio@gmail.com

Resumo:

Pesquisa operacional (PO) pode ser definida como a aplicação de métodos científicos a problemas complexos com o propósito de auxiliar no processo de tomada de decisões, tais como projetar, planejar e operar sistemas em situações que requerem alocações eficientes de recursos escassos. A Programação Linear (PL) é uma das técnicas da pesquisa operacional mais utilizadas em problemas de otimização. Atrrelados a estes conceitos o presente trabalho objetiva-se em mostrar uma aplicação da programação linear em um problema real de um Centro Educacional na Cidade de São Mateus - Espírito Santo. Para o trabalho, foram investigadas as restrições físicas e operacionais junto ao proprietário local. Em seguida, um modelo matemático foi desenvolvido para a formalização do problema, que descreveu o cenário, com a função objetivo e as restrições. As soluções foram derivadas a partir de ferramentas de programação linear, utilizando o software LINDO 6.1.

Palavras chave: Otimização, centro educacional, programação linear.

Operational Research Applied in Maximization of financial income from an Educational Center

Abstract

Operational Research can be defined as the application of scientific methods to complex problems with the purpose of support in the process of decision-making, such as designing, planning and operating system in situations that require efficient allocations of scarce resources. Linear programming is one of the most used operational research techniques in optimization problems. Tied to these concepts the present work aims to show an application of linear programming in a real problem of an educational center in the city of São Mateus – Espírito Santo. For this work, the physical and operational restrictions were investigated with the local owner. Next, a mathematical model was developed for formalizing the problem, which described the scenario, with the objective function and constraints. The solutions were derived from linear programming tools using LINDO 6.1 software.

Key-words: Optimization, educational center, linear programming;

1. Introdução

O termo Pesquisa Operacional (PO) historicamente foi utilizado pela primeira vez na Grã-Bretanha em 1938 para designar o estudo sistemático de problemas estratégicos e táticos

decorrentes de operações militares. Um grupo de especialistas (matemáticos, físicos, engenheiros e cientistas sociais) foi designado para avaliar e reposicionar adequadamente os radares do sistema de defesa aérea da Grã-Bretanha antes e durante a Segunda Guerra Mundial. Outras aplicações militares incluíram o planejamento de operações de comboios e bombardeios (CHAVES, 2011).

Dessa forma, após a Segunda Guerra Mundial esses especialistas e a sua nova metodologia de abordagem dos problemas, se transferiram para as empresas que novamente se depararam com problemas de decisão de grande complexidade. Dentre os métodos desenvolvidos durante esse período, o Método *Simplex* é considerado como um dos mais importantes e eficientes mecanismos de tomada de decisões relacionados os Problemas de Programação Linear. Adicionalmente, após o surgimento dos computadores digitais na década de 1950 foi possível desenvolver e utilizar novas metodologias para o resolvimento de uma grande variedade de problemas práticos (RAYMUNDO et al., 2015).

A programação linear (PL) pode ser considerada uma parte dos estudos de Pesquisa Operacional, e os problemas associados a essa vertente buscam a distribuição eficiente de recursos limitados para atender um determinado objetivo, em geral, maximizar lucros ou minimizar custos. Em PL, esse objetivo é expresso por meio de uma função linear, denominada de "Função Objetivo". É necessário também que se definam quais as atividades que consomem recursos e em que proporções os mesmos são consumidos. Ao conjunto dessas informações apresentadas em forma de equações e/ou inequações, denomina-se x'"Restrições do Modelo".

Inserindo-se neste contexto, o presente trabalho apresenta uma aplicação de programação linear para auxiliar na tomada de decisão de um Centro Educacional da cidade de São Mateus -ES relativamente a maximização da receita do mesmo.

2. Metodologia

Passos (2008) afirma que não existe um número de fases definidas no estudo da PO, e que estas dependem diretamente da complexidade do trabalho que se está realizando. Entretanto, de maneira geral, o estudo desta pode ser dividido nas seguintes fases:

- I. Identificação ou determinação do problema;
- II. Estudo do problema;
- III. Construção de um modelo para o problema;
- IV. Resolução do modelo;
- V. Validação do modelo;
- VI. Implementação do modelo.

Na fase I define-se precisamente o que será objeto de estudo. Na fase II são coletados todos os dados disponíveis, tendo a máxima precisão possível. A fase III traduz as fases um e dois em relações matemáticas. Em seguida a fase IV utiliza métodos de resolução conhecidos para resolver o modelo construído na fase III. Durante a fase V verifica-se se o modelo proposto representa apropriadamente o problema, ou seja, se o modelo prediz adequadamente o comportamento do sistema. Já durante a fase VI preocupa-se com a implementação da solução na prática, traduzindo os resultados do modelo em decisões.

2.1 Obtenção dos parâmetros

A partir de visitas e reuniões com o proprietário de centro educacional na cidade de São Mateus - ES, foi possível coletar todos os dados necessários para a formulação matemática do modelo. A Tabela 1 apresenta todas as modalidades de ensino do centro educacional, assim como a capacidade de aluno mínima e máxima para cada curso disponibilizado e suas respectivas receitas por aluno. A quantidade de alunos não pode exceder o limite devido a limitações de espaço físico e de professores. Contudo para os reforços escolares (nível fundamental, médio e superior), estes são aplicados no mesmo ambiente ao mesmo tempo, tal ambiente e formado por mesas ajustáveis que são determinadas a partir da quantidade de alunos ao qual é demandada, contudo essa contagem não pode ultrapassar, segundo o proprietário, 18 pessoas. Além disso, seguindo o fato de que os conteúdos são similares do pré-IFES e do Pré-Bolsão as aulas de ambos são realizadas no mesmo local, portanto não devem ultrapassar 60 pessoas.

Modalidades	Quantidade mínima (aluno)	Quantidade Máxima (aluno)	Receita por aluno
Reforço Nível Fundamental	1	10	R\$ 150,00
Reforço Nível Superior	1	10	R\$ 215,00
Reforço Nível Médio	1	10	R\$ 160,00
Pré-Cálculo	10	45	R\$ 200,00
Curso Preparatório Correios	15	60	R\$ 180,00
Pré-Vestibular	15	60	R\$ 215,00
Pré-IFES	20	45	R\$ 145,00
Pré-Bolsão	10	45	R\$ 120,00
Curso Preparatório Política Militar	10	45	R\$ 150,00
Curso Preparatório Petrobras- Nível Técnico	10	45	R\$ 210,00
Curso Preparatório Petrobras- Nível Superior	5	18	R\$ 310,00
Curso Preparatório Banco do Brasil	15	60	R\$ 180,00

Tabela 1 – Capacidade e receita de todas as modalidades de ensino do centro educacional

As aulas para cada modalidade já foram adequadas pela disposição dos professores e do ambiente pela equipe do centro educacional determinada pela disposição e modalidade tal quais os profissionais estão preparados para lecionar bem como o horário apresentado para as aulas, dessa forma abaixo estão dispostas essas condições:

1. Turno Matutino – Máximo de 100 alunos:

- Reforço Nível Fundamental;
- Reforço Nível Superior;
- Reforço Nível Médio;
- Pré-Cálculo;
- Curso Preparatório Correios.

2. Turno Vespertino – Máximo de 100 alunos:

- Pré-Vestibular;
- Pré-IFES;
- Pré-Bolsão.

3. Turno Noturno – Máximo de 120 alunos:

- Curso Preparatório Polícia Militar;
- Curso Preparatório Petrobras – Nível Técnico;
- Curso Preparatório Petrobras – Nível Superior;
- Curso Preparatório Banco do Brasil.

2.2 Formulação do problema

A formulação do problema do centro educacional consiste em estabelecer qual o número de vagas a oferecer em cada uma das modalidades de cursos. Com base nos dados obtidos do centro educacional, foi determinado todas as variáveis de decisão do modelo, a função objetivo, assim como todas as restrições do modelo. As variáveis de decisão do modelo representam cada modalidade dos cursos preparatórios oferecidos, ou seja, foi utilizado a nomenclatura X_1 à X_{12} para classificar as modalidades, sendo que:

- a) $X_1 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Correios;
- b) $X_2 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Petrobras – Técnico;
- c) $X_3 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Branco do Brasil;
- d) $X_4 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Petrobras – Superior;
- e) $X_5 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Polícia Militar;
- f) $X_6 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Pré – IFES;
- g) $X_7 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Pré – Vestibular;
- h) $X_8 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Pré – Bolsão;
- i) $X_9 \rightarrow$ Número de alunos para o curso preparatório Pré – Cálculo;
- j) $X_{10} \rightarrow$ Número de alunos para o reforço escolar de nível fundamental;
- k) $X_{11} \rightarrow$ Número de alunos para o reforço escolar de nível médio;
- l) $X_{12} \rightarrow$ Número de alunos para o reforço escolar de nível superior
- m)

A função objetivo do problema consiste em maximizar a receita do centro educacional dos cursos apresentados nos três turnos, através da análise das variáveis citadas anteriormente, ou seja, descobrir qual a melhor distribuição de alunos por curso que maximize sua receita. Assim a soma dessas receitas, multiplicadas pela quantidade de alunos que realizaram o curso irá resultar na receita total, conforme a Equação 1

$$\sum_{i=1}^{12} (\text{Receita por aluno} * X_i) \dots \dots \dots (1)$$

Assim, a função objetivo se torna:

$$\text{Maximizar: } Z = 180X_1 + 210X_2 + 180X_3 + 310X_4 + 150X_5 + 145X_6 + 215X_7 + 120X_8 + 200X_9 + 150X_{10} + 160X_{11} + 215X_{12}.$$

As restrições da função objetivo são apresentados na Tabela 2, em que as variáveis são delimitadas a partir da quantidade mínima e máxima de alunos para cada turno e modalidade de ensino.

Número	Restrição	Inequação
1	Associada aos recursos oferecidos no turno matutino (quantidade máxima de alunos suportada no turno).	$X_1 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 100$
2	Associada aos recursos oferecidos no turno vespertino (quantidade máxima de alunos suportada no turno).	$X_6 + X_7 + X_8 \leq 100$
3	Associada aos recursos oferecidos no turno noturno (quantidade máxima de alunos suportada no turno).	$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 120$
4	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório dos correios.	$X_1 \leq 60$
5	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório da Petrobras – Nível Técnico.	$X_2 \leq 45$
6	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Banco do Brasil.	$X_3 \leq 60$
7	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório da Petrobras – Nível Superior.	$X_4 \leq 18$
8	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório da Polícia militar.	$X_5 \leq 45$
9	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-IFES.	$X_6 \leq 45$
10	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-Vestibular.	$X_7 \leq 60$
11	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-Bolsão.	$X_8 \leq 45$
12	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-Cálculo.	$X_9 \leq 45$
13	Quantidade de alunos máxima para reforço de nível fundamental.	$X_{10} \leq 10$
14	Quantidade de alunos máxima para reforço de nível médio.	$X_{11} \leq 10$
15	Quantidade de alunos máxima para reforço de nível superior.	$X_{12} \leq 10$
16	Quantidade máxima de alunos nos reforços escolares.	$X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 18$
17	Quantidade de alunos mínima para o curso preparatório dos correios.	$X_1 \geq 15$
18	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório da Petrobras – Nível Técnico.	$X_2 \geq 10$
19	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Banco do Brasil.	$X_3 \geq 15$
20	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório da Petrobras – Nível Superior.	$X_4 \geq 5$
21	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório da Polícia militar.	$X_5 \geq 10$
22	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-IFES.	$X_6 \geq 20$
23	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-Vestibular.	$X_7 \geq 15$
24	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-Bolsão.	$X_8 \geq 10$
25	Quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-Cálculo.	$X_9 \geq 10$
26	Quantidade de alunos máxima para o reforço escolar nível fundamental.	$X_{10} \geq 1$
27	Quantidade de alunos máxima para o reforço escolar nível médio.	$X_{11} \geq 1$
28	Quantidade de alunos máxima para o reforço escolar nível superior.	$X_{12} \geq 1$

Tabela 2 – Restrições da função objetivo e suas respectivas inequações

A partir da formulação da função objetivo e de todas as restrições do modelo, segue então para o modelo matemático que será utilizado para maximizar a receita do centro educacional. Dessa forma foi possível modelar o problema como:

$$\text{Maximizar: } Z = 180X_1 + 210X_2 + 180X_3 + 310X_4 + 150X_5 + 145X_6 + 215X_7 + 120X_8 + 200X_9 + 150X_{10} + 160X_{11} + 215X_{12}$$

Sujeito a:

$$X_1 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 100$$

$$X_6 + X_7 + X_8 \leq 100$$

$$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 120$$

$$X_1 \leq 60$$

$$X_2 \leq 45$$

$$X_3 \leq 60$$

$$X_4 \leq 18$$

$$X_5 \leq 45$$

$$X_6 \leq 45$$

$$X_7 \leq 60$$

$$X_8 \leq 45$$

$$X_9 \leq 45$$

$$X_{10} \leq 10$$

$$X_{11} \leq 10$$

$$X_{12} \leq 10$$

$$X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 18$$

$$X_1 \geq 15$$

$$X_2 \geq 10$$

$$X_3 \geq 15$$

$$X_4 \geq 5$$

$$X_5 \geq 10$$

$$X_6 \geq 20$$

$$X_7 \geq 15$$

$$X_8 \geq 10$$

$$X_9 \geq 10$$

$$X_{10} \geq 1$$

$$X_{11} \geq 1$$

$$X_{12} \geq 1$$

3. Resultados

3.1 Análise dos resultados

A partir da simulação os resultados foram obtidos, conforme a Figura 1.

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      17
OBJECTIVE VALUE =    60930.0000

NEW INTEGER SOLUTION OF    60930.0000    AT BRANCH      0 PIVOT      21
BOUND ON OPTIMUM:    60930.00
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      21

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)      60930.00

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      43.000000      -180.000000
X2      10.000000      -210.000000
X3      60.000000      -180.000000
X4      18.000000      -310.000000
X5      32.000000      -150.000000
X6      30.000000      -145.000000
X7      60.000000      -215.000000
X8      10.000000      -120.000000
X9      45.000000      -200.000000
X10      1.000000      -150.000000
X11      1.000000      -160.000000
X12      10.000000      -215.000000

ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
2)      0.000000      0.000000
3)      0.000000      0.000000
4)      0.000000      0.000000
5)      6.000000      0.000000
6)      17.000000      0.000000
7)      35.000000      0.000000
8)      0.000000      0.000000
9)      0.000000      0.000000
10)      13.000000      0.000000
11)      15.000000      0.000000
12)      0.000000      0.000000
13)      35.000000      0.000000
14)      0.000000      0.000000
15)      9.000000      0.000000
16)      9.000000      0.000000
17)      0.000000      0.000000
18)      28.000000      0.000000
19)      0.000000      0.000000
20)      45.000000      0.000000
21)      13.000000      0.000000
22)      22.000000      0.000000
23)      10.000000      0.000000
24)      45.000000      0.000000
25)      0.000000      0.000000
26)      35.000000      0.000000
27)      0.000000      0.000000
28)      0.000000      0.000000
29)      9.000000      0.000000

NO. ITERATIONS=      21
BRANCHES=      0 DETERM.= 1.000E 0

```

Figura 1 – Solução do modelo inicial.

Toda essa análise contida neste trabalho foi realizada pela percepção do proprietário, que identificou a necessidade de otimizar a ocupação de seu estabelecimento, gerando a maior receita possível. Dessa forma, o proprietário especificou o ponto crítico do problema que está na distribuição das vagas oferecidas de modo a gerar a maior receita possível.

Conclui-se que a melhor distribuição das turmas, para maximizar a receita, é a seguinte:

43 alunos para o curso preparatório Correios;

10 alunos para o curso preparatório Petrobras – Técnico ;
60 alunos para o curso preparatório Banco do Brasil;
18 alunos para o curso preparatório Petrobras - Superior;
32 alunos para o curso preparatório Polícia Militar;
30 alunos para o curso preparatório Pré-IFES;
60 alunos para o curso preparatório Pré-Vestibular;
10 alunos para o curso preparatório Pré-Bolsão;
45 alunos para o curso preparatório Pré-Cálculo;
1 aluno para o reforço escolar de nível fundamental;
1 aluno para o reforço escolar de nível Médio;
10 alunos para o reforço escolar de nível superior.

Com os dados obtidos a Máxima receita mensal do Centro Educacional será de R\$ 60.930,00. Tais resultados foram significantes, pois atendem as restrições indicadas pelo proprietário, e demonstram uma projeção da receita do centro educacional requerida pelo mesmo.

3.2 Análise de sensibilidade

Para efetuar uma análise das melhorias que se pode ter com a mudança de uma restrição, e o quanto essa razão pode alterar na função objetiva maximizada, foi realizada uma análise de sensibilidade, a qual será apresentada abaixo. Aumentando a primeira restrição em uma unidade e mantendo constantes as demais restrições a nova receita terá seu valor acrescido para:

$$\text{Nova restrição} \rightarrow X_1 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} \leq 101$$

Solução encontrada com um total da receita alterado para R\$ 61110,00, conforme a Figura 2

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      17
OBJECTIVE VALUE =      61110.0000

NEW INTEGER SOLUTION OF      61110.0000      AT BRANCH      0 PIVOT      21
BOUND ON OPTIMUM:      61110.00
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      21

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)      61110.00

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      44.000000      -180.000000
X2      10.000000      -210.000000
X3      60.000000      -180.000000
X4      18.000000      -310.000000
X5      32.000000      -150.000000
X6      30.000000      -145.000000
X7      60.000000      -215.000000
X8      10.000000      -120.000000
X9      45.000000      -200.000000
X10      1.000000      -150.000000
X11      1.000000      -160.000000
X12      10.000000      -215.000000
```

Figura 2 – Solução do modelo para uma receita de R\$ 61110,00.

Foram realizados testes aumentando para 105, 115 e 120 e as receitas geradas respectivamente foram 61830, 63530 e 64470. Como tal restrição diz respeito ao espaço físico e a limitações de profissionais a alteração de aumentar em 1 aluno no turno matutino será de R\$ 60.930,00 para R\$ 61110,00.

Aumentando a segunda restrição em uma unidade e mantendo constantes as demais restrições, a nova receita terá seu valor acrescido para:

$$\text{Nova restrição} \rightarrow X_6 + X_7 + X_8 \leq 101$$

Solução encontrada alterando a receita para R\$ 61075,00, conforme a Figura 3

```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      36
OBJECTIVE VALUE =      61075.0000

NEW INTEGER SOLUTION OF      61075.0000      AT BRANCH      0 PIVOT      38
BOUND ON OPTIMUM: 61075.00
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      38

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)      61075.00

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      43.000000      -180.000000
X2      10.000000      -210.000000
X3      60.000000      -180.000000
X4      18.000000      -310.000000
X5      32.000000      -150.000000
X6      31.000000      -145.000000
X7      60.000000      -215.000000
X8      10.000000      -120.000000
X9      45.000000      -200.000000
X10      1.000000      -150.000000
X11      1.000000      -160.000000
X12      10.000000      -215.000000

```

Figura 3 – Solução do modelo para uma receita de R\$ 61075,00.

Foram realizados testes aumentando para 105, 115 e 120 e as receitas geradas respectivamente foram 61655, 63105 e 63705. Como tal restrição diz respeito ao espaço físico e a limitações de profissionais a alteração de aumentar em 1 aluno no turno Vespertino será de R\$ 60.930,00 para R\$ 61075,00.

Aumentando a terceira restrição em uma unidade e mantendo constantes as demais restrições a nova receita terá seu valor acrescido para:

$$\text{Nova restrição} \rightarrow X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 121$$

Solução encontrada alterando a receita para R\$ 61080,00, conforme a Figura 4.

```

NEW INTEGER SOLUTION OF      61080.0000      AT BRANCH      0 PIVOT      38
BOUND ON OPTIMUM:  61080.00
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      38

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      61080.00

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      43.000000      -180.000000
X2      10.000000      -210.000000
X3      60.000000      -180.000000
X4      18.000000      -310.000000
X5      33.000000      -150.000000
X6      30.000000      -145.000000
X7      60.000000      -215.000000
X8      10.000000      -120.000000
X9      45.000000      -200.000000
X10      1.000000      -150.000000
X11      1.000000      -160.000000
X12      10.000000      -215.000000
    
```

Figura 4 – Solução do modelo para uma receita de R\$ 61080,00.

Foram realizados testes aumentando para 125, 130 e 140 e as receitas geradas respectivamente foram 61680, 62430 e 63090. Como tal restrição diz respeito ao espaço físico e a limitações de profissionais a alteração de aumentar em 1 aluno no turno Noturno será de R\$ 60.930,00 para R\$ 61080,00.

Para maior visualização das restrições que influenciam diretamente na receita final do centro educacional, utilizando o solver essas restrições foram incrementadas em uma unidade e as relações estão apresentadas na Tabela 2.

Nova Restrição	Nova Receita	Nova Restrição	Nova Receita
$x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 19$	R\$ 63090,00	$x_7 \leq 61$	R\$ 61000,00
$x_1 \leq 61$	R\$ 60930,00	$x_8 \leq 46$	R\$ 60930,00
$x_2 \leq 46$	R\$ 60930,00	$x_9 \leq 46$	R\$ 60950,00
$X_3 \leq 61$	R\$ 60960,00	$x_{10} \leq 11$	R\$ 60930,00
$x_4 \leq 19$	R\$ 61090,00	$x_{11} \leq 11$	R\$ 60930,00
$x_5 \leq 46$	R\$ 60930,00	$x_{12} \leq 11$	R\$ 61145,00
$x_6 \leq 46$	R\$ 60930,00	$x_1 \geq 16$	R\$ 60930,00
$x_2 \geq 11$	R\$ 60810,00	$x_3 \geq 16$	R\$ 60930,00
$x_4 \geq 6$	R\$ 60930,00	$x_5 \geq 11$	R\$ 60930,00

Tabela 2– Soluções a partir de novas restrições do modelo

- A sexta restrição diz respeito à quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Banco do Brasil, aumentando a receita de R\$ 60.930,00 para R\$ 60960,00;
- A sétima restrição diz respeito à quantidade de alunos máxima para o curso preparatório da Petrobras – Nível Superior, aumentando a receita de R\$ 60.930,00 para R\$ 61090,00;
- A décima restrição diz respeito à quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-Vestibular, aumentando a receita de R\$ 60.930,00 para R\$ 61000,00;
- A décima segunda diz respeito à quantidade de alunos máxima para o curso preparatório do Pré-Cálculo, aumentando a receita de R\$ 60.930,00 para R\$ 60950,00;
- A décima quinta restrição diz respeito à quantidade de alunos máxima para reforço de nível superior, aumentando a receita de R\$ 60.930,00 para R\$ 61145,00;

- f) A décima sexta restrição diz respeito à quantidade máxima de alunos nos reforços escolares, aumentando a receita de R\$ 60.930,00 para R\$ 63090,00.
- g) Demais restrições em destaques não alteraram o valor da receita após o incremento de uma unidade.

4. Considerações finais

Os valores obtidos e toda modelagem realizada, bem como as entrevistas realizadas com o proprietário do local, demonstraram grande interesse do mesmo pela área da pesquisa operacional, pois esta pode ser considerada uma ótima forma de planejamento dos custos e da melhor maneira de dispor dos recursos oferecidos.

O presente projeto mostra a receita maximizada, bem como a distribuição das turmas para produzir a mesma. Além disso, a análise de sensibilidade mostra que alterando os valores das restrições apresentadas pelo proprietário, pode-se gerar uma receita maior do que a apresentada como máxima na solução do problema.

De forma geral, percebe-se que com o conhecimento de Pesquisa Operacional, e solução por programação linear, os empresários terão uma grande ferramenta gerencial em suas mãos para tomada de decisão. Além disso, a Pesquisa Operacional pode ser utilizada como ferramenta racional para decisões gerenciais na alocação de recursos fornecendo uma solução ótima, proporciona também informações para a compreensão de como a solução do problema irá mudar se diferentes fatores do modelo mudarem.

Referências

- CHAVES, V. H. C.** *Perspectivas históricas da Pesquisa Operacional*. 2011. 118f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica). Universidade Estadual Paulista,
- RAYMUNDO, E. A; GONÇALVES, L. W. N; RIBEIRO, N. S.** *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisão: Modelo de Otimização de Produção e Maximização do Lucro*. Journal of Management & Technology. Vol 3, nº 1, 2015.
- PASSOS, E.** *Programação linear como instrumento da pesquisa operacional*. São Paulo: Atlas, 2008.
- GEVERT, V. G. et al.** *Otimização de um processo de produção de farinhas utilizando Programação Linear*. Anais do Congresso Brasileiro de Engenharia de Produção, 2011, Ponta Grossa.