

Comparação entre as Metaheurísticas, Métodos Exatos e Relaxações na solução do "Multidimensional Knapsack" binário

Cleibson Aparecido de Almeida (UAb), contato@cleibsonalmeida.blog.br

Elaine Cristina da Silva Schilipack (UFPR), elaineschilipack@gmail.com

Jorge Luiz Farias (CENIPA), fariasjlf@fab.mil.br

Nivaldo Aparecido Minervi (PRF), nivaldominervi@yahoo.com.br

Beatriz Macedo Coimbra (FGV), beatrizmacedo@hotmail.com

Resumo:

Este trabalho apresenta uma comparação entre os métodos exatos, meta heurísticas e as relaxações para a solução do problema do multidimensional knapsack ou mochila multidimensional. Para isso, foram selecionados três conjuntos de dados com diferentes níveis de complexidade quanto ao número de variáveis e restrições do problema. Sob este conjunto de dados foi apresentado a modelagem e solução do problema para os três níveis de complexidade. Em seguida, foram analisados o desempenho computacional em relação ao tempo de execução do algoritmo e também a convergência dos resultados obtidos em relação ao valor ótimo. Por fim, foram feitas considerações sobre o uso das técnicas apresentadas para a solução de problemas que apresentam o formato do multidimensional knapsack.

Palavras-chave: Problema da Mochila Binária, métodos exatos, algoritmos genéticos, relaxações.

Comparison between Metaheuristics, Exact Methods and Relaxations in the binary "Multidimensional Knapsack" problem

Abstract:

This work presents a comparison between the exact methods, meta heuristics and the problem solving of the multidimensional knapsack or multidimensional backpack. For this purpose, three data sets with different levels of complexity regarding the number of variables and constraints of the problem. Under this data set was presented the modeling and solution of the problem for the three levels of complexity. Then, the computational performance in the execution time of the algorithm and also the convergence of the obtained results in relation to the optimum value. Finally, considerations were made on the use of the techniques presented for the solution of problems that present the multidimensional knapsack format.

Keywords: Multidimensional Knapsack, exact methods, genetic algorithms, relaxation.

1 Introdução

Segundo Chu e Beasley (1998), a otimização dos recursos é o principal objetivo em diversas áreas que se apropriam da matemática para a tomada de decisão, como as áreas de logística, transporte e produção. O pilar matemático dessa otimização de recursos está na solução de problemas de otimização combinatória. A otimização combinatória é composta por um grande conjunto de problemas, sendo os de programação linear mais conhecidos, difundidos e utilizados.

Um importante problema de otimização combinatória é o tradicional problema da mochila 0-1 ou problema da mochila binária. Este problema baseia-se na ideia de que n itens podem ser alocados (1) ou não (0) dentro de uma mochila, sendo que esta mochila possui uma limitação em sua capacidade de

armazenamento. Portanto, subentende-se que nem todos itens serão alocados dentro da mochila, pois a restrição quanto a limitação de sua capacidade é um fator de decisão para determinar quais e quantos itens serão colocados na mochila.

Apesar do problema da mochila 0-1 apresentar diversas aplicações no mundo real, existe uma quantidade interessante de variantes desse problema que implicam em uma quantidade ainda maior de aplicações no mundo real. Essas variantes tratam a mochila como um elemento que pode ser modificado de diversas maneiras.

Dentro do contexto de variantes do problema da mochila, existe o problema da mochila multidimensional proposto por Petersen (1967) e Chu e Beasley (1998), também conhecido como *multidimensional knapsack*. Este problema difere-se do tradicional problema da mochila 0-1 devido ao fato que a mochila multidimensional apresenta diversas limitações e os itens que serão alocados devem respeitar essas limitações da mochila.

Desta forma, é de fácil compreensão que uma mochila com diversas limitações estará associada ao problema da mochila multidimensional, enquanto uma mochila que considera apenas uma única limitação será a tradicional mochila 0-1.

Uma dificuldade comum para o entendimento do problema da mochila é a correta compreensão entre as variantes do problema e distinção específica entre o problema da mochila multidimensional e o problema da mochila múltipla, uma vez que o significado das palavras múltipla e multidimensional induzem a confusão. Enquanto a mochila multidimensional é entendida como uma **única** mochila com diversas limitações em relação aos itens, a mochila múltipla se baseia no conceito de **diversas** mochilas 0-1 tradicionais serão alocadas com itens. Em resumo, na mochila multidimensional os itens serão alocados sob a limitação das diversas características dos itens em uma única mochila e na mochila múltipla os itens serão alocados entre as diversas mochilas disponíveis considerando apenas uma característica dos itens.

De forma a exemplificar a mochila multidimensional, imagine a Figura 1, que apresenta um conjunto de itens formado por caneta, grampeador e fita adesiva. Cada um desses itens possui suas próprias características, como por exemplo, peso, volume e um valor correspondente ao risco de quebra do item. Desta forma, a escolha dos itens que serão alocados na tradicional **mochila 0-1 será baseada apenas no peso** de cada um dos itens, enquanto a escolha daqueles que serão alocados na **mochila multidimensional estará embasada em outras características ou dimensões dos itens**, como por exemplo, o volume, o valor do risco de quebra e o próprio peso do item. Com isso, é possível afirmar que a mochila multidimensional é mais restritiva do que a mochila 0-1 tradicional.

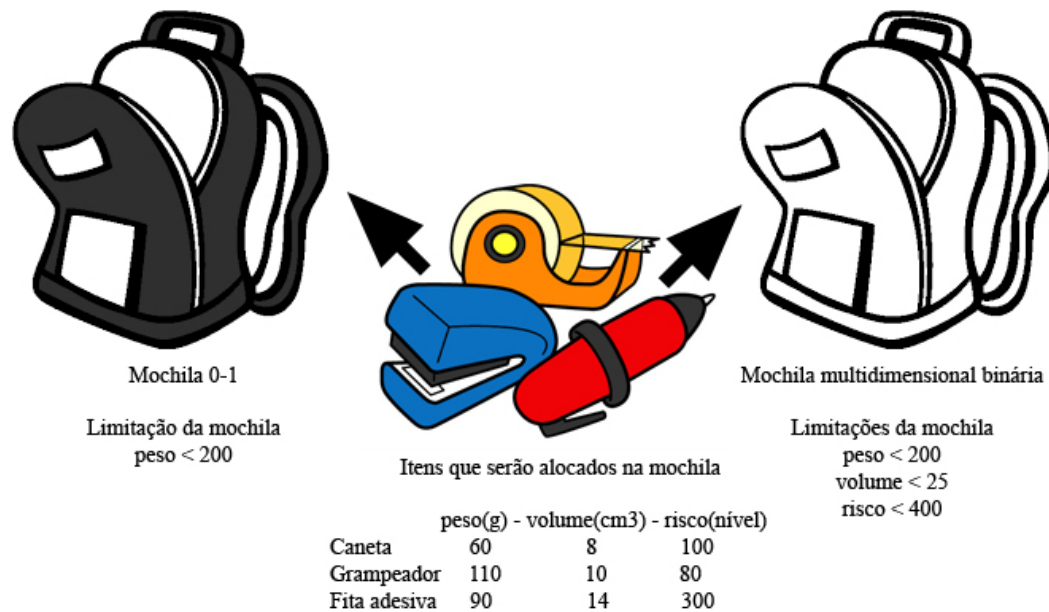


Figura 1: Diferença entre a mochila 0-1 e a mochila multidimensional

Como o foco deste trabalho é a comparação de diferentes métodos de solução para a mochila multidimensional, daqui em diante todo o assunto será referente a esta variante do problema.

Dentre as aplicações reais do problema da mochila multidimensional estão a alocação de recursos em ambientes heterogêneos, logística da distribuição de cargas com opções multimodal, otimização de containers para transporte marítimo, distribuição de atividades em variados grupos de trabalho e outras (AKCAY; XU, 2007).

Devido a sua importância e aplicações reais, o problema da mochila multidimensional tem sido amplamente estudado por pesquisadores das áreas de matemática e computação. A principal explicação para o interesse desses pesquisadores é que este problema tem complexidade Np-difícil (Np-Hard) e para solucionar problemas reais não há um método exato que resolva o problema em um tempo polinomial (DANTAS, 2016; COLIN, 2011). Para Caserta e Voss (2010), na medida em que a modelação de problemas reais resulta muitas vezes em problemas de complexidade Np-difíceis, a determinação das soluções ótimas exatas torna-se impossível quando se lida com muitas variáveis e dados de larga escala.

De acordo com Back e Heitkoetter (1994), algumas denotações sobre o assunto são referenciados na literatura como *multiconstraint knapsack problem*, *multi-knapsack problem* e *0/1 multidimensional knapsack problem*.

De acordo com Lopes, Rodrigues e Steiner (2013), o problema da mochila multidimensional pode ser resolvido com diferentes técnicas computacionais, como por exemplo, algoritmos de solução exata ou métodos meta heurísticos. Assim, este trabalho propõe utilizar métodos exatos, meta heurísticas e relaxações na solução do problema.

2 Formulação do problema

Com base na formulação proposta por Akcay e Xu (2007), o problema da mochila multidimensional binária (PMM) é feita da seguinte forma:

- x_j representa os itens j que poderão ser alocados na mochila (0 - não será alocado e; 1 - será alocado);
- p_j é o custo de alocação de cada item j , na mochila;
- r_{ij} é o valor da característica i referente a cada item j dos itens que serão alocados na mochila;

- b_i é a limitação da mochila para cada característica i , dos itens que serão alocados;
- u_j é a limitação da mochila referente a quantidade de itens que podem ser alocados, se x_j for binário, então $u_j = 1$.

$$(PMM) \text{ Maximizar } z = \sum_{j=1}^n p_j x_j$$

$$\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \leq u_j \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n$$

Sendo m o número de características dos itens e n a quantidade de itens que poderão ser alocados na mochila.

2.1 Modelagem do Problema

A escolha dos conjuntos de dados (disponíveis na OR-Library) (<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/mknapinfo.html>), foi realizada com base na complexidade do problema. Esta complexidade foi definida como sendo o número de itens disponíveis para serem alocados na mochila (variáveis x_j) multiplicada pela quantidade de características de cada item (restrições).

Assim, o primeiro conjunto de dados tem complexidade $6 \times 10 = 60$, o segundo tem complexidade $15 \times 10 = 150$ e o terceiro tem complexidade $50 \times 5 = 250$. Para fins didáticos, eles foram classificados com complexidade baixa, média e alta, respectivamente.

2.1.1 Problema 1 - Complexidade baixa

Este problema tem 6 variáveis (itens) com 10 restrições (características dos itens).

$$\text{Maximizar } z = 100x_1 + 600x_2 + 1200x_3 + 2400x_4 + 500x_5 + 2000x_6$$

sujeito a :

$$8x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 64x_4 + 22x_5 + 41x_6 \leq 80$$

$$8x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 75x_4 + 22x_5 + 41x_6 \leq 96$$

$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 18x_4 + 6x_5 + 4x_6 \leq 20$$

$$5x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 32x_4 + 6x_5 + 12x_6 \leq 36$$

$$5x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 42x_4 + 6x_5 + 20x_6 \leq 44$$

$$5x_1 + 13x_2 + 8x_3 + 48x_4 + 6x_5 + 20x_6 \leq 48$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 8x_5 + 0x_6 \leq 10$$

$$3x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 8x_5 + 0x_6 \leq 18$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 8x_5 + 4x_6 \leq 22$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 8x_5 + 4x_6 \leq 24$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

2.1.2 Problema 2 - Complexidade média

Este problema tem 15 variáveis (itens) com 10 restrições (características dos itens).

$$\text{Maximizar } z = 100x_1 + 220x_2 + 90x_3 + 400x_4 + 300x_5 + 400x_6 + 205x_7 + 120x_8 + 160x_9 + 580x_{10} + 400x_{11} + 140x_{12} + 100x_{13} + 1300x_{14} + 650x_{15}$$

sujeito a :

$$8x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 80x_4 + 70x_5 + 80x_6 + 45x_7 + 15x_8 + 28x_9 + 90x_{10} + 130x_{11} + 32x_{12} + 20x_{13} + 120x_{14} + 40x_{15} \leq 550$$

$$8x_1 + 44x_2 + 13x_3 + 100x_4 + 100x_5 + 90x_6 + 75x_7 + 25x_8 + 28x_9 + 120x_{10} + 130x_{11} + 32x_{12} + 40x_{13} + 160x_{14} + 40x_{15} \leq 700$$

$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 30x_6 + 8x_7 + 3x_8 + 12x_9 + 14x_{10} + 40x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 20x_{14} + 5x_{15} \leq 130$$

$$5x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 40x_4 + 30x_5 + 40x_6 + 16x_7 + 5x_8 + 18x_9 + 24x_{10} + 60x_{11} + 16x_{12} + 11x_{13} + 30x_{14} + 25x_{15} \leq 240$$

$$5x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 50x_4 + 40x_5 + 40x_6 + 19x_7 + 7x_8 + 18x_9 + 29x_{10} + 70x_{11} + 21x_{12} + 17x_{13} + 30x_{14} + 25x_{15} \leq 280$$

$$5x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 55x_4 + 40x_5 + 40x_6 + 21x_7 + 9x_8 + 18x_9 + 29x_{10} + 70x_{11} + 21x_{12} + 17x_{13} + 35x_{14} + 25x_{15} \leq 310$$

$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 10x_4 + 4x_5 + 10x_6 + 0x_7 + 6x_8 + 0x_9 + 6x_{10} + 32x_{11} + 3x_{12} + 0x_{13} + 70x_{14} + 10x_{15} \leq 110$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 14x_5 + 20x_6 + 6x_7 + 12x_8 + 10x_9 + 18x_{10} + 42x_{11} + 9x_{12} + 12x_{13} + 100x_{14} + 20x_{15} \leq 205$$

$$3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 30x_4 + 29x_5 + 20x_6 + 12x_7 + 12x_8 + 10x_9 + 30x_{10} + 42x_{11} + 18x_{12} + 18x_{13} + 110x_{14} + 20x_{15} \leq 260$$

$$3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 35x_4 + 29x_5 + 20x_6 + 16x_7 + 15x_8 + 10x_9 + 30x_{10} + 42x_{11} + 20x_{12} + 18x_{13} + 120x_{14} + 20x_{15} \leq 275$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15} \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15} \in \{0, 1\}$$

2.1.3 Problema 3 - Complexidade alta

Este problema tem 50 variáveis (itens) com 5 restrições (características dos itens).

$$\text{Maximizar } z = 560x_1 + 1125x_2 + 300x_3 + 620x_4 + 2100x_5 + 431x_6 + 68x_7 + 328x_8 + 47x_9 + 122x_{10} + 322x_{11} + 196x_{12} + 41x_{13} + 25x_{14} + 425x_{15} + 4260x_{16} + 416x_{17} + 115x_{18} + 82x_{19} + 22x_{20} + 631x_{21} + 132x_{22} + 420x_{23} + 86x_{24} + 42x_{25} + 103x_{26} + 215x_{27} + 81x_{28} + 91x_{29} + 26x_{30} + 49x_{31} + 420x_{32} + 316x_{33} + 72x_{34} + 71x_{35} + 49x_{36} + 108x_{37} + 116x_{38} + 90x_{39} + 738x_{40} + 1811x_{41} + 430x_{42} + 3060x_{43} + 215x_{44} + 58x_{45} + 296x_{46} + 620x_{47} + 418x_{48} + 47x_{49} + 81x_{50}$$

sujeito a :

$$40x_1 + 91x_2 + 10x_3 + 30x_4 + 160x_5 + 20x_6 + 3x_7 + 12x_8 + 3x_9 + 18x_{10} + 9x_{11} + 25x_{12} + 1x_{13} + 1x_{14} + 10x_{15} + 280x_{16} + 10x_{17} + 8x_{18} + 1x_{19} + 1x_{20} + 49x_{21} + 8x_{22} + 21x_{23} + 6x_{24} + 1x_{25} + 5x_{26} + 10x_{27} + 8x_{28} + 2x_{29} + 1x_{30} + 0x_{31} + 10x_{32} + 42x_{33} + 6x_{34} + 4x_{35} + 8x_{36} + 0x_{37} + 10x_{38} + 1x_{39} + 40x_{40} + 86x_{41} + 11x_{42} + 120x_{43} + 8x_{44} + 3x_{45} + 32x_{46} + 28x_{47} + 13x_{48} + 2x_{49} + 4x_{50} \leq 800$$

$$16x_1 + 92x_2 + 41x_3 + 16x_4 + 150x_5 + 23x_6 + 4x_7 + 18x_8 + 6x_9 + 0x_{10} + 12x_{11} + 8x_{12} + 2x_{13} + 1x_{14} + 0x_{15} + 200x_{16} + 20x_{17} + 6x_{18} + 2x_{19} + 1x_{20} + 70x_{21} + 9x_{22} + 22x_{23} + 4x_{24} + 1x_{25} + 5x_{26} + 10x_{27} + 6x_{28} + 4x_{29} + 0x_{30} + 4x_{31} + 12x_{32} + 8x_{33} + 4x_{34} + 3x_{35} + 0x_{36} + 10x_{37} + 0x_{38} + 6x_{39} + 28x_{40} + 93x_{41} + 9x_{42} + 30x_{43} + 22x_{44} + 0x_{45} + 36x_{46} + 45x_{47} + 13x_{48} + 2x_{49} + 2x_{50} \leq 650$$

$$38x_1 + 39x_2 + 32x_3 + 71x_4 + 80x_5 + 26x_6 + 5x_7 + 40x_8 + 8x_9 + 12x_{10} + 30x_{11} + 15x_{12} + 0x_{13} + 1x_{14} + 23x_{15} + 100x_{16} + 0x_{17} + 20x_{18} + 3x_{19} + 0x_{20} + 40x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23} + 0x_{24} + 6x_{25} + 4x_{26} + 22x_{27} + 4x_{28} + 6x_{29} + 1x_{30} + 5x_{31} + 14x_{32} + 8x_{33} + 2x_{34} + 8x_{35} + 0x_{36} + 20x_{37} + 0x_{38} + 0x_{39} + 6x_{40} + 12x_{41} + 6x_{42} + 80x_{43} + 13x_{44} + 6x_{45} + 22x_{46} + 14x_{47} + 0x_{48} + 1x_{49} + 2x_{50} \leq 550$$

$$8x_1 + 71x_2 + 30x_3 + 60x_4 + 200x_5 + 18x_6 + 6x_7 + 30x_8 + 4x_9 + 8x_{10} + 31x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 0x_{14} + 18x_{15} + 60x_{16} + 21x_{17} + 4x_{18} + 0x_{19} + 2x_{20} + 32x_{21} + 15x_{22} + 31x_{23} + 2x_{24} + 2x_{25} + 7x_{26} + 8x_{27} + 2x_{28} + 8x_{29} + 0x_{30} + 2x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + 7x_{34} + 1x_{35} + 0x_{36} + 0x_{37} + 20x_{38} + 8x_{39} + 14x_{40} + 20x_{41} + 2x_{42} + 40x_{43} + 6x_{44} + 1x_{45} + 14x_{46} + 20x_{47} + 12x_{48} + 0x_{49} + 1x_{50} \leq 550$$

$$38x_1 + 52x_2 + 30x_3 + 42x_4 + 170x_5 + 9x_6 + 7x_7 + 20x_8 + 0x_9 + 3x_{10} + 21x_{11} + 4x_{12} + 1x_{13} + 2x_{14} + 14x_{15} + 310x_{16} + 8x_{17} + 4x_{18} + 6x_{19} + 1x_{20} + 18x_{21} + 15x_{22} + 38x_{23} + 10x_{24} + 4x_{25} + 8x_{26} + 6x_{27} + 0x_{28} + 0x_{29} + 3x_{30} + 0x_{31} + 10x_{32} + 6x_{33} + 1x_{34} + 3x_{35} + 0x_{36} + 3x_{37} + 5x_{38} + 4x_{39} + 0x_{40} + 30x_{41} + 12x_{42} + 16x_{43} + 18x_{44} + 3x_{45} + 16x_{46} + 22x_{47} + 30x_{48} + 4x_{49} + 0x_{50} \leq 650$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{29}, x_{30}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{48}, x_{49}, x_{50} \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{28}, x_{29}, x_{30}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{48}, x_{49}, x_{50} \in \{0, 1\}$$

3 Técnicas utilizadas

3.1 Métodos Exatos

O método exato utilizado para resolver o problema da mochila multidimensional é a implementação do algoritmo simplex, com apoio da técnica de corte *branch and bound*. De acordo com Goldbarg e Luna (2005), o branch and bound baseia-se na ideia de desenvolver uma enumeração inteligente dos pontos candidatos à solução ótima inteira de um problema.

Portanto, trata-se de uma técnica híbrida e que já está implementada no pacote Solver do Microsoft Excel 2013. A implementação realizada está baseada na formulação matemática descrita na seção 2.

3.2 Algoritmos Genéticos

Algoritmo genético (AG) é um método meta heurístico baseado na população (evolução biológica) para busca e otimização que tem sido largamente utilizado na solução de problemas reais de alta complexidade computacional (LOPES; RODRIGUES; STEINER, 2013; SORENSEN; GLOVER, 2013). De acordo com Hoff, Løkketangen e Mittet (1996). Os algoritmos genéticos são procedimentos computacionais sequenciais baseados nos conceitos biológicos, de seleção natural Darwinista e genética. As primeiras ideias sobre algoritmos genéticos foram publicadas por John H. Holland, nos anos 70, e estão detalhadas na referência (HOLLAND, 1975).

O funcionamento de um algoritmo genético é baseado na reprodução de um conjunto de indivíduos, sendo que a cada nova reprodução são gerados novos indivíduos com características modificadas para que os mesmos tenham melhor condição de sobrevivência. Migrando esta ideia para um conjunto de dados, mais especificamente para o problema da mochila, pode-se entender que a cada reprodução gerada pelo algoritmo produzirá uma nova combinação de dados que poderá maximizar a função objetivo em relação a reprodução anterior ou solução inicial do problema (DANTAS, 2016).

Segundo Lopes, Rodrigues e Steiner (2013), o funcionamento do algoritmo genético no problema da mochila multidimensional se dá da seguinte forma:

”Utilizando-se de uma população inicial aleatória, o algoritmo genético avalia como cada indivíduo se adapta ao problema através da função de fitness, associada ao objetivo do problema. Esta função fornece um valor considerado a qualidade do indivíduo. A partir disso, os indivíduos de melhor qualidade têm maiores chances de serem selecionados para o processo reprodutivo. A seleção é realizada pelo método do torneio estocástico. A geração de novos indivíduos ocorre através da aplicação de operadores genéticos de crossover e mutação aos indivíduos anteriormente selecionados. Os novos indivíduos constituem uma nova população e são avaliados pela função de fitness e o processo se repete por um número predefinido de gerações.”

A utilização do algoritmo genético para resolver cada um dos três problemas, foi realizada com o apoio do pacote Solver, implementado no Microsoft Excel 2013. Como opção de implementação foram considerados quatro modificações no parâmetro de tamanho da população, apresentadas a seguir.

3.2.1 Algoritmos genéticos - Implementação 1

Nesta implementação foram considerados os seguintes valores para os parâmetros do Solver. a) Convergência: 0,0001; b) Taxa de mutação: 0,075; c) Tamanho da população: 50 indivíduos; d) Propagação aleatória: 0 e e) Tempo máximo sem aperfeiçoamento: 30.

3.2.2 Algoritmos genéticos - Implementação 2

Nesta implementação foram considerados os seguintes valores para os parâmetros do Solver. a) Convergência: 0,0001; b) Taxa de mutação: 0,075; c) Tamanho da população: 100 indivíduos; d) Propagação aleatória: 0 e e) Tempo máximo sem aperfeiçoamento: 30.

3.2.3 Algoritmos genéticos - Implementação 3

Nesta implementação foram considerados os seguintes valores para os parâmetros do Solver. a) Convergência: 0,0001; b) Taxa de mutação: 0,075; c) Tamanho da população: 200 indivíduos; d) Propagação aleatória: 0 e e) Tempo máximo sem aperfeiçoamento: 30.

3.2.4 Algoritmos genéticos - Implementação 4

Nesta implementação foram considerados os seguintes valores para os parâmetros do Solver. a) Convergência: 0,0001; b) Taxa de mutação: 0,075; c) Tamanho da população: 500 indivíduos; d) Propagação aleatória: 0 e e) Tempo máximo sem aperfeiçoamento: 30.

3.3 Relaxações

Como o problema a ser resolvido envolve variáveis binárias e neste caso a restrição binária é mais rígida do que a restrição para variáveis inteiras ou reais, foram utilizadas duas abordagens de relaxação. a) relaxação linear inteira e b) relaxação linear real. Para a implementação da forma relaxada foi utilizado o Solver do Microsoft Excel 2013, sendo as implementações realizadas conforme os itens 3.3.1 e 3.3.2, a seguir.

Considere as seguintes variáveis:

- x_j representa os itens j que poderão ser alocados na mochila;
- p_j é o custo de alocação de cada item j , na mochila;
- r_{ij} é o valor da característica i referente a cada item j dos itens que serão alocados na mochila;
- b_i é a limitação da mochila para cada característica i , dos itens que serão alocados;

- u_j é a limitação da mochila referente a quantidade de itens que podem ser alocados.

Para a Relaxação linear inteira temos:

$$\begin{aligned} (PMM) \text{Maximizar } z &= \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\leq u_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_j &\in \{\mathbb{Z}^+\} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Para a Relaxação linear real temos:

$$\begin{aligned} (PMM) \text{Maximizar } z &= \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{sujeito a: } \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j &\leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\leq u_j \quad j = 1, \dots, n \\ x_j &\in \{\mathbb{R}^+\} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Sendo m o número de características dos itens e n a quantidade de itens que poderão ser alocados na mochila.

4 Considerações sobre os Métodos

De acordo com Cavique (2002), apesar dos algoritmos exatos garantirem a solução ótima para o problema, muitas vezes em situações reais eles estão associados a um grande esforço computacional e neste caso a dificuldade pode ser contornada com a utilização de métodos aproximativos. Este é o caso das meta heurísticas, como o algoritmo genético apresentado anteriormente.

Dessa forma, conforme exposto nas seções 3.1, 3.2 e 3.3, os três problemas a serem maximizados podem ser resolvidos por qualquer um dos métodos apresentados anteriormente. A diferença entre eles, basicamente, leva em consideração dois critérios: a) convergência para o valor exato da maximização e b) desempenho computacional, que utiliza métrica "tempo de execução do algoritmo".

Em relação ao critério de convergência para o valor exato existem três possíveis condições, conforme abordado por na Figura 2 (CAVIQUE, 2002):

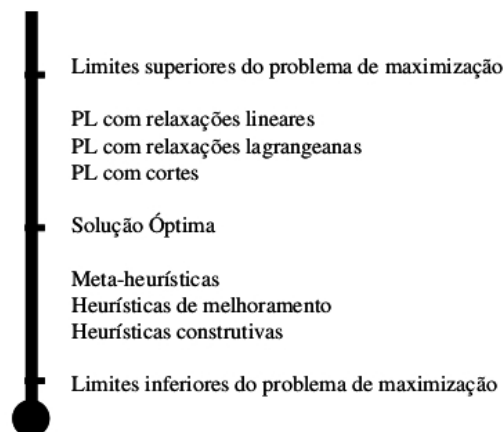


Figura 2: Limites superiores e inferiores do problema de maximização

Com isso, a solução ótima do problema estará compreendida no intervalo entre o limite superior e inferior e a regra para este limite é dada por $He \leq Opt \leq Rel$, sendo: He = Solução pela meta heurística, Opt = Solução pelo método exato e Rel = Solução com relaxações.

5 Resultados Computacionais

Conforme explicado na seção 3.4, os dois critérios adotados para a análise de resultados neste trabalho foram: a) convergência da solução para o valor ótimo e; b) desempenho computacional durante a execução do algoritmo. Aqui serão observados os dois critérios e para facilitar a leitura dos resultados foram definidas as seguintes taxonomias.

VR1 - Valor de referência, na solução exata encontrada pelos autores [9].

EX1 - Solução pelo método exato. (descrito em 3.1)

RE1 - Solução com relaxação linear inteira. (descrito em 3.3.1)

RE2 - Solução com relaxação linear real. (descrito em 3.3.2)

AG1 - Solução com algoritmo genético, implementação 1. (descrito em 3.2.1)

AG2 - Solução com algoritmo genético, implementação 2. (descrito em 3.2.2)

AG3 - Solução com algoritmo genético, implementação 3. (descrito em 3.2.3)

AG4 - Solução com algoritmo genético, implementação 4. (descrito em 3.2.4)

Primeiramente os resultados foram analisados sob a ótica do critério de convergência da solução para o valor ótimo e depois em relação ao desempenho computacional.

Os resultados referentes ao critério de convergência da solução para o valor ótimo foi avaliado em cada um dos três problemas versus métodos utilizados, apresentados na Tabela 1 e Figura 3. De imediato, pode-se observar que estão listados sequencialmente os valores de referência (VR1), método exato (EX1), relaxações (RE1 e RE2) e algoritmos genéticos (AG1, AG2, AG3 e AG4).

Observa-se que os resultados obtidos com as relaxações (RE1 e RE2) foram melhores do que qualquer outro método em todos os três problemas, fato isto já era esperado, uma vez que os resultados das relaxações lineares fazem parte dos limites superiores do problema (Figura 2). De um outro ponto de vista, métodos que enquadram-se nos limites inferiores, os resultados obtidos com os algoritmos genéticos (AG1, AG2, AG3 e AG4) se apresentaram iguais a solução ótima para os problemas 1 e 2, porém foram piores na solução do problema 3, em que a complexidade do problema é maior.

Desta forma, é perceptível a limitação, perante os resultados da maximização do problema, dos algoritmos genéticos quando comparados aos métodos exatos conforme aumenta-se a complexidade do problema. Observando apenas os resultados de AG1, AG2, AG3 e AG4, percebe-se que AG3 foi relativamente melhor do que os demais e AG1 apresentou o pior resultado para o problema 3. AG1 foi executado considerando uma população de 50 indivíduos, a menor população dentre as quatro simulações realizadas.

Portanto, a implementação do algoritmo genético com o parâmetro "população" de menor valor, apresentou o pior resultado para o conjunto de dados utilizado neste trabalho. Esta evidência contraria os resultados obtidos no experimento realizado por Jong (1975), em que foi constatado que o melhor tamanho de população para um algoritmo genético está na faixa de 50 a 100 indivíduos. Neste trabalho, e especificamente para o conjunto de dados maior (problema 3), foi percebido que o tamanho da população igual a 200 indivíduos tem melhores resultados quando comparado com modelos que adotaram 50, 100 ou 500 indivíduos.

Voltando aos resultados das relaxações, é possível identificar que os valores obtidos com a relaxação linear real (RE2) apresenta valores maiores do que a relaxação linear inteira (RE1) nos problemas 2 e 3 e quando comparado com a solução exata essa diferença é ainda maior. Portanto, não há dúvidas de que a restrição relacionada a variáveis inteiras (RE1) e no nível mais restrito para variáveis binárias (EX1), diminui o valor obtido na maximização. Porém, é salutar que esse tipo de relaxação só poderá ser considerada em aspectos teóricos, uma vez que o problema da mochila multidimensional binária está atrelado a restrição de variáveis binárias.

Em uma análise macro, observa-se que a soma dos valores obtidos como solução para cada um dos problemas foi plotada na Figura 3. Perceba que a linha, na cor lilás, representa a soma dos resultados obtidos para os três problemas e para cada um dos métodos utilizados. O primeiro ponto desta linha representa o valor de referência obtido por Petersen (1967). O segundo ponto representa o valor exato, obtido após a implementação no Solver do Microsoft Excel 2013. Em seguida, esta linha lilás apresenta uma concavidade discrepante na região representada pelos resultados da relaxação (RE1 e RE2) e volta ao seu traçado padrão quando permeia os resultados dos algoritmos genéticos (AG1, AG2, AG3 e AG4). A percepção disso é que, apesar da teoria comprovar que os métodos aproximativos são piores do que os exatos, aqui foi percebido que para os três problemas implementados seria viável utilizar os resultados dos algoritmos genéticos como uma boa opção para a solução dos problemas.

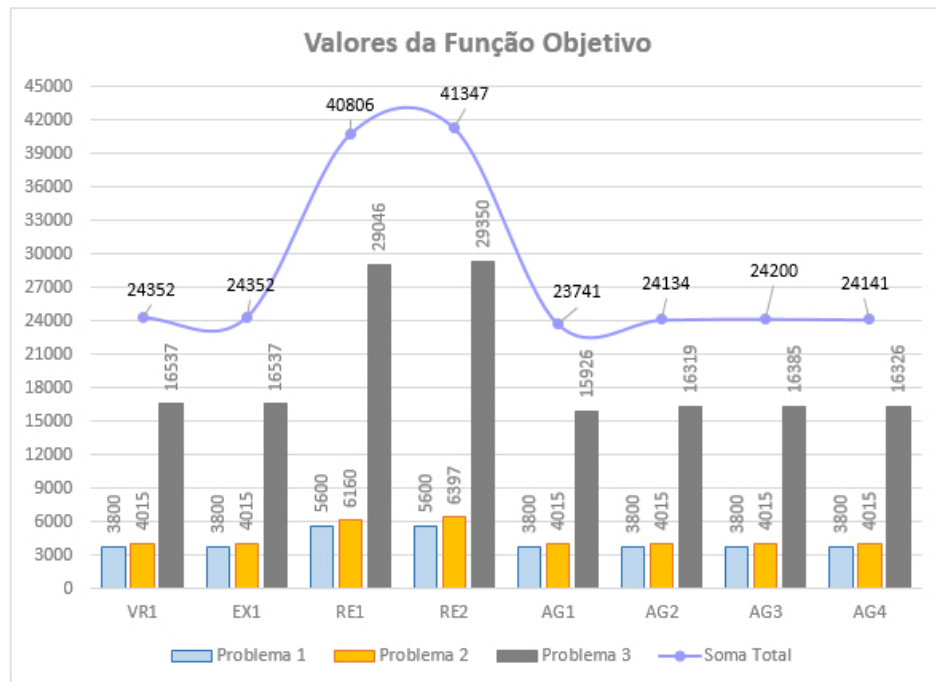


Figura 3: Resultados obtidos para o critério de convergência da solução para o valor ótimo

Para finalizar a análise neste contexto de convergência da solução para o valor ótimo, definem-se os seguintes melhores resultados para cada método e problema.

Solução do Problema 1:

- Método exato: Opt = EX1 = 3800
- Meta heurística: He = (AG1 = AG2 = AG3 = AG4) = 3800
- Relaxação: Rel = (RE1 = RE2) = 5600

Solução do Problema 2:

- Método exato: Opt = EX1 = 4015
- Meta heurística: He = (AG1 = AG2 = AG3 = AG4) = 4015
- Relaxação: Rel = (RE2) = 6397

Solução do Problema 3:

- Método exato: Opt = EX1 = 16537
- Meta heurística: He = (AG3) = 16385
- Relaxação: Rel = (RE2) = 29350

Portanto, para os problema 1, 2 e 3 confirma-se a teoria descrita por (CAVIQUE, 2002), em que $He \leq Opt \leq Rel$. Desta forma, há evidências de que as relaxações são melhores do que o método exato e o método exato é melhor do que o algoritmo genético para a solução ótima no problema da mochila multidimensional.

Seguindo na análise, deste ponto em diante será tratado o critério de desempenho computacional, que foi mensurado de acordo com o tempo de execução (em segundos) de cada método implementado (Tabela 2). Note que a escala de cores reflete um pior desempenho (vermelho) ou melhor desempenho (verde). As cores intermediárias, como amarelo e laranja mostram que o desempenho do algoritmo foi mediano.

Note que a cor verde foi predominante na região composta pelo método exato (EX1) e métodos de relaxação (RE1 e RE2), com exceção em RE1 quando o algoritmo foi executado para resolver o problema 3 (considerado de complexidade alta). Para entender melhor essa lentidão específica, foi gerado uma tabela mostrando a quantidade de subproblemas que o algoritmo precisou resolver durante a sua execução (Tabela 3).

Ao observar a Tabela 3, nota-se que o método de relaxação linear inteira (RE1) teve que resolver mais subproblemas do que os demais, quando o algoritmo foi executado para o problema 3. Para se ter uma ideia relativa dessa quantidade de subproblemas que RE1 teve que resolver, perceba que o método AG1 teve que resolver 40220 subproblemas, enquanto RE1 resolveu 101186, ou seja, mais do que o dobro de subproblemas resolvidos pelo AG1.

Uma análise mais ampla, quanto ao desempenho computacional resume-se em dividir os métodos em dois grupos. O primeiro grupo compreende os método exato (EX1) e as relaxações (RE1 e RE2) e o segundo grupo compreende as soluções com o algoritmo genético (AG1, AG2, AG3 e AG4). Enquanto o método exato e as relaxações se mostraram melhores, os algoritmos genéticos apresentaram pior desempenho computacional em um contexto mais amplo.

No geral, diante do critério de desempenho computacional, o algoritmo genético não se apresentou como alternativa viável para a solução do problema, pois teve desempenho pior do que o método exato e as relaxações.

Tabela 1: Resultados obtidos para o critério de convergência da solução para o valor ótimo

	VR1	EX1	RE1	RE2	AG1	AG2	AG3	AG4
Problema 1	3800	3800	5600	5600	3800	3800	3800	3800
Problema 2	4015	4015	6160	6397	4015	4015	4015	4015
Problema 3	16537	16537	29046	29350	15926	16319	16385	16326
Soma Total	24352	24352	40806	41347	23741	24134	24200	24141

Tabela 2: Resultados obtidos para o critério de desempenho computacional

	VR1	EX1	RE1	RE2	AG1	AG2	AG3	AG4
Problema 1	0	0,031	0,031	0,016	49	42	50	54
Problema 2	0	0,125	0,078	0,015	48	47	44	45
Problema 3	0	0,484	204	0,047	53	56	47	43
Soma Total	0	0,64	204,109	0,078	150	145	141	142

Tabela 3: Quantidade de subproblemas resolvido pelos algoritmos

	VR1	EX1	RE1	RE2	AG1	AG2	AG3	AG4
Problema 1	0	10	0	0	33550	26930	35587	32188
Problema 2	0	62	22	0	31897	34620	26967	27681
Problema 3	0	128	101186	0	32587	40220	26367	24457
Soma Total	0	200	101208	0	98034	101770	88921	84326

6 Conclusões

Este trabalho apresentou a resolução de três problemas de otimização computacional, conhecido como problema da mochila multidimensional binária, com a utilização de diferentes abordagens metodológicas. As abordagens utilizadas foram o método de solução exata, algoritmos genéticos e as relaxações.

O principal desafio encontrado foi o entendimento do conjunto de dados, apesar da documentação do OR-Library tentar detalhar a estrutura dos dados. O segundo maior desafio foi a compreensão das diferenças entre o problema tradicional da mochila e o problema da mochila multidimensional. Por fim, a dificuldade ficou por conta da implementação dos métodos na ferramenta Solver do Microsoft Excel 2013.

Os resultados obtidos com o trabalho mostraram que as relaxações maximizaram o problema de forma melhor do que a solução exata, sendo a solução exata melhor do que os algoritmos genéticos. Em relação ao desempenho computacional, os resultados se mostraram favoráveis ao método de solução exata e as relaxações, enquanto os algoritmos genéticos se mostraram de pior desempenho. Sendo assim, não é recomendado que o algoritmo genético seja uma boa alternativa ao método exato, sobretudo por seu pior desempenho computacional, sendo que a solução obtida é aproximada.

Como conclusão final deste trabalho, ficou comprovado que a relação descrita por Cavique (2002) se aplica ao problema da mochila multidimensional binária, ou seja, a convergência para o valor ótimo respeitou a regra $He \leq Opt \leq Rel$ nos três problemas resolvidos. Por fim, este trabalho mostrou que o problema da mochila multidimensional binária pode ser facilmente implementada com o apoio do Solver do Microsoft Excel para solucionar problemas de dimensões similares aos apresentados.

Referências

- AKCAY, H. L. Y.; XU, S. S. H. Greedy algorithm for the general multidimensional knapsack problem. *Annals of Operations Research - Springer*, v. 150, p. 17–29, 2007. page.33
- BACK, T. K. S.; HEITKOETTER, J. The zero/one multiple knapsack problem and genetic algorithm proc. *ACM Symposium on Applied Computing*, p. 188–193, 1994. page.33
- CASERTA, M.; VOSS, S. Metaheuristics: Intelligent problem solving. In: _____. *Matheuristics: Hybridizing Metaheuristics and Mathematical Programming*. Boston, MA: Springer US, 2010. p. 1–38. ISBN 978-1-4419-1306-7. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-1306-7_1. page.33
- CAVIQUE, L. M. P. S. *Meta-heurísticas na Resolução do Problema da Clique Máxima e Aplicação na Determinação do Cabaz de Compras*. Tese (Doutorado), Lisboa, Portugal, 2002. page.88, page.1111, page.1313
- CHU, P. C.; BEASLEY, J. E. A genetic algorithm for the multidimensional knapsack problem. *Journal of Heuristics*, v. 4, p. 63–86, 1998. page.11, page.22
- COLIN, E. *Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas*. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. page.33
- DANTAS, B. d. A. *Metaheurísticas para o problema da mochila multidimensional*. Tese (Tese de Doutorado), Campo Grande, 2016. page.33, page.66
- GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. L. *Otimização combinatória e programação linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005. page.66
- HOFF, A.; LØKKETANGEN, A.; MITTET, I. Genetic algorithms for 0/1 multidimensional knapsack problems. In: *Proceedings Norsk Informatikk Konferanse, NIK '96*. [S.l.: s.n.], 1996. page.66

HOLLAND, J. H. *Adaption in Natural and Artificial Systems*. Michigan: Univerty of Michigan Press, 1975. page.66

JONG, K. A. D. *An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems*. Tese (Doutorado), Ann Arbor, MI, USA, 1975. AAI7609381. page.1010

LOPES, H. S.; RODRIGUES, L. C. d. A.; STEINER, M. T. A. *Meta-heurísticas em pesquisa operacional*. Curitiba: Omnipax Editora, 2013. page.33, page.66

PETERSEN, C. C. Computational experience with variants of the balas algorithm applied to the selection of rd projects. *Management Science*, v. 13, p. 736–750, 1967. page.22, page.1010

SORENSEN, K.; GLOVER, F. Metaheuristics. *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, Springer US, New York, p. 1–12, 2013. page.66