

Uma heurística relax-and-fix e um modelo de programação inteira mista para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de processos.

Beatriz Empke Villas Boas (Universidade Federal de São Carlos) beatrizempke@gmail.com

Reinaldo Morabito Neto (Universidade Federal de São Carlos) morabito@ufscar.br

Resumo:

O presente trabalho trata do problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de processo. Esse problema consiste em determinar quais processos utilizar, em quais quantidades, por exemplo, horas de produção, e a sequência de utilização desses processos, atendendo sempre as restrições de capacidade de produção e a demanda dos produtos finais. Um processo pode ser definido como uma configuração de um sistema de produção, que permite produzir itens diferentes de forma simultânea e em quantidades variadas. O modelo apresentado foi baseado no modelo de Martínez e Toso (2015), que adapta o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes geral (GLSP) de produtos para processos. O modelo de programação inteira mista (MIP) proposto e uma heurística *Relax-and-Fix* particionada por período foram implementados no C++ utilizando o Concert Technology da IBM, com tempo limite de execução de 3.600 segundos. A heurística produziu bons resultados, com desvios pequenos em relação à solução encontrada pelo modelo, em tempos computacionais expressivamente menores. Esses resultados indicam uma boa aplicação da *Relax-and-Fix* para esse problema quando uma resposta factível de boa qualidade é necessária em tempos menores ou como uma boa solução inicial para heurísticas de melhoria.

Palavras chave: Dimensionamento e sequenciamento de lotes de processo, relax-and-fix, MIP-heurística, programação inteira mista.

A relax-and-fix heuristics and a mixed integer programming model for the lotsizing, scheduling and process selection problem.

Abstract

This work deals with the integrated problem of lotsizing, scheduling and process selection. This problem consists in defining which process should be used, in which quantity, for example, hours of production, and the sequence of these processes, while attending production capacity constraints and demand for final products. A process can be considered as any configuration of a production system, which allows multiple items be simultaneously produced in varying quantities. The model presented was based on the model proposed by Martínez and Toso (2015), which adapts the general lotsizing and scheduling problem (GLSP) from products to processes. The proposed mixed integer programming (MIP) model and a relaxed-and-fix heuristic partitioned by period were implemented in C++ using Concert Technology from IBM, with an execution limit of 3,600 seconds. The heuristic produces good

results, with small deviations in relation to the solution found by the model, in expressively smaller computational times. These results indicate a good application of Relax-and-Fix for this problem when a feasible solution of good quality is needed in shorter times or as a good initial solution for better heuristics.

Key-words: Lotsizing, scheduling and process selection problem, relax-and-fix, MIP-heuristics, mixed integer programming.

1. Introdução

O Planejamento e Controle da Produção (PCP) é responsável pelo gerenciamento dos recursos humanos e físicos de um sistema durante um horizonte de planejamento definido, de modo a atingir objetivos geralmente relacionados à minimização dos custos. Algumas das decisões abordadas pelo PCP consistem em determinar os tipos de produtos a serem produzidos, assim como o volume e sequência de produção dos mesmos, levando em consideração a demanda, custos, limitações de capacidade e outras restrições do sistema. Esse problema é conhecido como o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produto.

Em alguns contextos industriais os produtos demandados são obtidos por meio da utilização de processos de produção. Um processo pode ser considerado como qualquer modo de operação ou configuração especial de um sistema de produção, que permite produzir vários itens de forma simultânea e em quantidades diferentes. A programação da produção desses processos pode ser chamada de dimensionamento e sequenciamento de lotes de processo (JOHNSON; MONTGOMEY, 1974; MARTÍNEZ; TOSO, 2015).

O objetivo desse trabalho é propor um modelo para o dimensionamento e sequenciamento de lotes de processo baseado em modelos já apresentados na literatura e uma heurística *relax-and-fix* para a resolução desse modelo.

2. Revisão Bibliográfica

Os problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produto têm sido encontrados em diferentes tipos de indústrias, tais como de bebidas (FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2009; FERREIRA et al. 2012), cerveja (BALDO et al., 2014), aviária (BOONMEE; SETHANAN, 2016), nutrição animal (TOSO; MORABITO; CLARK, 2009; CLARK; MORABITO; TOSO, 2010), cimento (ALVES et al., 2016), alimentos (CLAASSEN et al., 2016), entre outras. A complexidade destes problemas é influenciada pelas características do sistema de produção e os parâmetros considerados, como horizonte de tempo, número de níveis na produção do produto, número de produtos, restrições de capacidade e de recursos, danificação de itens no estoque, demanda, tempos e custos de preparação, falta de produtos, entre outros (KARIMI; GHOMI; WILSON, 2003).

Percebe-se que esse problema é um problema de programação inteira mista (*Mixed Integer Programming*, MIP), pois há a presença de uma variável binária. Segundo Guimarães, Klabjan e Almada-Lobo (2012), modelos de MIP são incapazes de resolver instâncias de problemas de tamanhos relevantes devido a limitações computacionais (é um modelo NP-completo), portanto a literatura apresenta muitas soluções utilizando heurísticas e metaheurísticas para esses problemas.

O dimensionamento e sequenciamento de lotes de processo se difere do dimensionamento e sequenciamento de lotes de produto, pois os itens demandados são produzidos a partir da utilização processos, que são configurados na linha de produção, incluindo tempos e custos de preparação dependentes da sequência (JOHNSON; MONTGOMERY, 1974). A produção de diferentes produtos por um mesmo processo influencia diretamente nos níveis de estoque, que devem ser controlados para evitar o acúmulo de grandes volumes para produtos que não possuem demandas expressivas (MARTÍNEZ; TOSO, 2015).

Algumas indústrias que utilizam esse modelo de produção já foram estudadas como as indústrias de polpa moldada (MARTÍNEZ; TOSO, 2015; MARTÍNEZ; TOSO; MORABITO, 2016), indústrias químicas (SAHINIDIS; GROSSMAN, 1991; SAHINIDIS; GROSSMAN, 1992; LU; QI, 2011), as indústrias de grãos eletrofundidos (LUCHE; MORABITO, 2005; LUCHE; MORABITO; PUREZA, 2009), indústria madeireira (GAUDREAU et al., 2011; RAFIEL; SANTA-EULALIA; NOURELFATH, 2016), e refinarias de petróleo (GÖTHE-LUNDGREN; LUNDGREN; PERSSON, 2002; SHI et al., 2014; CHUNPENG; GANG, 2009). No entanto, ainda há poucos estudos desse problema, ao contrário do problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produtos, já extensivamente estudado.

3. Modelo Proposto

O Modelo (1-8) foi adaptado de Martínez e Toso (2015). O modelo original é baseado na formulação para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes geral (GLSP), aplicado a uma indústria de polpa moldada.

Nesse trabalho foi considerado um sistema de produção de uma única máquina, múltiplos períodos, múltiplos processos e múltiplos produtos, com a possibilidade de atraso na demanda. Cada processo pode produzir de forma simultânea mais de um tipo de produto, com taxas de produção diferentes. Os tempos e custos de troca são dependentes da sequência de programação dos processos. O horizonte de planejamento é dividido em $|T|$ períodos, cada um dos quais é subdividido em $|S_t|$ subperíodos. Em cada subperíodo apenas um único processo pode ser utilizado. As Tabelas 1, 2 e 3 mostram os índices e conjuntos utilizados pelo modelo, parâmetros e variáveis respectivamente.

Símbolo	Definição
i	Produtos, $i \in N$
j, k	Processos, $j, k \in K$
s	Sub-períodos, $s \in S$; $s \in S_t$
t	Períodos, $t \in T$

Tabela 1 - Índices e conjuntos do modelo proposto

Símbolo	Definição
d_{it}	Demanda do produto i no período t .
p_{ij}	Unidades do produto i obtidas a partir do processo j (und/hora).
Q_t	Capacidade disponível (horas) no período t .
st_{jk}	Tempo de preparação envolvido na troca do processo j para o processo k .
I_{i0}	Estoque inicial do produto i .
c_{jk}	Custo de preparação envolvido na troca do processo j para o processo k .
h_{it}	Custo unitário de estocagem do produto i no período t .
g_{it}	Custo unitário de atraso do produto i no período t .

Tabela 2 – Parâmetros do modelo proposto

Símbolo	Definição
x_{js}	Tempo de utilização do processo j no subperíodo s
I_{it}^+	Estoque do produto i no período t
I_{it}^-	Atraso do produto i no período t
y_{js}	1, se a máquina está preparada para o processo j no subperíodo s , 0 c.c.
z_{jks}	1, se há troca do processo j para o processo k no subperíodo s , 0 c.c.

Tabela 3 - Variáveis do modelo proposto

$$Z = \min \sum_{i \in N} \sum_{t \in T} (h_{it} I_{it}^+ + g_{it} I_{it}^-) + \sum_{j,k \in K} \sum_{s \in S} c_{jk} z_{jks} \quad (1)$$

Sujeito a:

$$I_{it}^+ - I_{it}^- = I_{i(t-1)}^+ - I_{i(t-1)}^- + \sum_{j \in K} \sum_{s \in S_t} p_{ij} x_{js} - d_{it} \quad \forall i \in N; t \in T \quad (2)$$

$$\sum_{j \in K} y_{js} = 1 \quad \forall t \in T; s \in S_t \quad (3)$$

$$x_{js} \leq Q_t y_{js} \quad \forall j \in K; t \in T; s \in S_t \quad (4)$$

$$y_{j(s-1)} = \sum_{k \in K} z_{jks} \quad \forall j \in K; s \in S \quad (5)$$

$$y_{ks} = \sum_{j \in K} z_{jks} \quad \forall k \in K; t \in T; s \in S_t \quad (6)$$

$$\sum_{j \in K} \sum_{s \in S_t} x_{js} + \sum_{j,k \in K} \sum_{s \in S_t} s t_{jk} z_{jks} \leq Q_t \quad \forall t \in T \quad (7)$$

$$I_{it}, x_{js} \in R^+; \quad z_{jks}, y_{ks} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N; j, k \in K; t \in T; s \in S_t \quad (8)$$

A função objetivo (1) minimiza os custos de estocagem, atrasos e trocas dependentes da sequência. A restrição (2) corresponde ao balanceamento de estoque, atraso e atendimento a demanda. Nota-se nessa restrição a diferença entre o dimensionamento de lotes de processo e de produto. Para calcular a quantidade produzida de um determinado produto i em um período t é necessário somar o produto das horas de produção de determinado processo (x_{js}) pela quantidade de itens i produzida por hora pelo processo j (p_{ij}) para cada processo em cada subperíodo. A restrição (3) garante que em cada subperíodo seja utilizado apenas um processo. A restrição (4) relaciona a utilização de um processo j em um subperíodo s com a preparação para esse processo j no mesmo subperíodo. A capacidade do período é utilizada nessa equação como um número extremamente grande (big M), portanto, se o processo j é utilizado no subperíodo s ($x_{js} > 0$), a variável binária y_{js} obrigatoriamente será 1, o que significa que a máquina para esse processo j está preparada nesse subperíodo s . A restrição (5) determina que se há um processo j preparado no subperíodo $s-1$ então há uma troca do

processo j para algum processo do conjunto $|K|$ no início do subperíodo s . A restrição (6) determina que se no subperíodo s existe um processo k preparado, então no início do período s houve uma troca de algum processo do conjunto $|K|$ para o processo k . A restrição (7) corresponde a restrição de capacidade, na qual o tempo de preparação e de utilização de cada processo não ultrapasse a capacidade disponível em cada período. A expressão (8) corresponde ao domínio das variáveis.

4. Relax-and-fix

Essa heurística, baseada em métodos exatos de programação matemática, foi proposta por Wolsey (1998). Ela propõe uma partição das variáveis inteiras em P conjuntos, onde Q_i é o conjunto de variáveis do conjunto i , e $i = 1, 2, \dots, P$. O tamanho de P irá definir o número de iterações da heurística. Para cada iteração n , o conjunto Q_n é definido como inteiro e o restante das variáveis inteiras são relaxadas. O Modelo (9 – 13) apresenta a primeira iteração da heurística, onde as variáveis no conjunto Q_1 são inteiras e as variáveis presentes nos outros conjuntos ($Q \setminus Q_1$) são relaxadas.

$$(MIP^1) \quad \min (cx + fy) \quad (9)$$

$$Ax + By \geq b \quad (10)$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n \quad (11)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in Q_1 \quad (12)$$

$$y_j \in [0,1] \quad \forall j \in Q \setminus Q_1 \quad (13)$$

Se (x^1, y^1) é a solução ótima do MIP^1 , as variáveis no conjunto Q_1 são fixadas nos valores de y^1 e o modelo MIP^2 é resolvido. Subsequentemente para os outros conjuntos p , $2 \leq p \leq P$, o MIP^p tem as variáveis fixadas nos valores de y do $MIP^{(p-1)}$ e as variáveis do conjunto Q^p são definidas como inteiras, assim como apresentado no Modelo (14-19).

$$(MIP^p) \quad \min (cx + fy) \quad (14)$$

$$Ax + By \geq b \quad (15)$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n \quad (16)$$

$$y_j = y_j^{(p-1)} \in \{0,1\} \quad \forall j \in Q_1 \cup \dots \cup Q_{p-1} \quad (17)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in Q_p \quad (18)$$

$$y_j \in [0,1] \quad \forall j \in Q \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_p) \quad (19)$$

Se todos os subproblemas p são factíveis, então (x^P, y^P) é a solução da heurística *relax-and-fix* (POCHET; WOLSEY, 2006; FERREIRA; MORABITO; RANGEL, 2008).

Muitos trabalhos que utilizam *relax-and-fix* para problemas de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produto podem ser encontrados na literatura, como em Araujo, Arenales e Clark (2007), Toso, Morabito e Clark (2009), Ferreira, Morabito e Rangel (2009), Seeanner e Meyr (2013) e Baldo et al. (2014). A aplicação dessa heurística para

dimensionamento e sequenciamento de lotes de produto pode ser facilmente adaptada para o caso de dimensionamento e sequenciamento de processos, pois as variáveis inteiras que são relaxadas e fixadas normalmente não se alteram nesses dois problemas, como por exemplo, a variável de estado de preparação.

A estratégia de partição baseada no uso do índice dos períodos de tempo, $t \in T$, proposta foi a *relax-and-fix forward*, que inicializa a integralização das variáveis a partir do período $t = 1$ e termina no período $t = T$.

5. Experimentos Computacionais

As instâncias utilizadas nos testes computacionais estão divididas em duas categorias. A primeira (G1), são possuem com 14 produtos, 19 processos, 4 períodos e 40 subperíodos. Essas instâncias foram recortadas de dados reais de uma indústria de polpa moldada, e adaptadas para o cenário mono-máquina. O segundo grupo (G2) apresenta a instâncias geradas aleatoriamente baseadas no comportamento dos dados da indústria. Elas têm como característica 20 produtos, 40 processos, 4 períodos e 40 subperíodos.

Nessa seção os resultados obtidos a partir da implementação do modelo e métodos em C++ e CPLEX 12.5 são apresentados. O tempo limite de execução para todas as instâncias foi de 3.600 segundos.

A Tabela 4 apresenta os resultados do modelo MIP e da heurística *relax-and-fix forward*, que particiona o problema por período e se inicia no período 1. A coluna relativa a F.O. apresenta a solução da função objetiva encontrada, a coluna do *gap* retrata o gap de otimalidade do CPLEX e os tempos são apresentados em segundos. A coluna referente ao Desvio MIP mostra o desvio percentual das soluções apresentadas pela heurística em relação à solução encontrada pelo modelo MIP $([solução\ MIP - solução\ R\&F] / solução\ MIP)$.

Instância	MIP			R&F <i>forward</i>		
	F.O.	Gap	Tempo	F.O.	Desvio MIP	Tempo
G1_Ex_1	127.824,48	36%	3.600,00	135.452,68	6,0%	41,85
G1_Ex_2	41.426,77	0%	140,13	45.089,51	8,8%	10,18
G1_Ex_3	38.680,40	0%	432,53	46.744,86	20,8%	26,93
G1_Ex_4	50.089,23	0%	213,66	58.125,69	16,0%	9,88
G1_Ex_5	41.507,23	0%	526,39	48.945,06	17,9%	29,86
G1_Ex_6	119.990,60	6%	3.600,00	127.257,71	6,1%	15,09
G1_Ex_7	105.816,91	0%	3.355,94	115.647,16	9,3%	5,52
G1_Ex_8	129.908,43	0%	2.212,32	131.362,13	1,1%	40,35
G1_Ex_9	74.892,49	0%	2.288,09	78.424,25	4,7%	28,36
G1_Ex_10	37.060,34	0%	148,71	37.244,63	0,5%	35,89
G1_Ex_11	40.205,62	0%	255,69	50.108,30	24,6%	26,89
Média	73.400,23	4%	1.524,86	79.491,09	10,5%	24,62
G2_Ex_1	59.402,14	42%	3.600,00	67.718,95	14,0%	291,98
G2_Ex_2	63.662,51	12%	3.600,00	67.922,48	6,7%	118,61
G2_Ex_3	63.058,74	18%	3.600,00	73.175,09	16,0%	503,36
G2_Ex_4	94.221,71	44%	3.600,00	89.016,94	-5,5%	1.257,35
G2_Ex_5	68.037,48	29%	3.600,00	67.831,79	-0,3%	630,87

G2_Ex_6	95.336,83	66%	3.600,00	103.239,79	8,3%	3.600,00
G2_Ex_7	66.774,55	31%	3.600,00	116.608,14	74,6%	3.600,00
G2_Ex_8	64.990,51	15%	3.600,00	79.145,26	21,8%	202,9
G2_Ex_9	57.303,32	30%	3.600,00	63.986,33	11,7%	237,92
G2_Ex_10	63.456,92	20%	3.600,00	74.048,51	16,7%	161,92
G2_Ex_11	61.604,89	24%	3.600,00	77.036,83	25,0%	978,04
G2_Ex_12	78.080,03	56%	3.600,00	88.423,86	13,2%	1.789,91
Média	69.660,80	32%	3.600,00	80.679,50	16,9%	1.114,41

 Tabela 4 - Resultados Modelo MIP e heurística *relax-and-fix forward*

Analisando as instâncias do Grupo 1, podemos perceber que a solução apresentada pela heurística possui um desvio relativamente baixo em relação a solução apresentada pelo modelo MIP se comparamos o tempo. O maior desvio foi de 24,6%, para a instância G1_Ex_11, e o menor de 0,5% para a instância G1_Ex_10, com a média de desvio em 10,5% para todas as instâncias desse grupo. Analisando o tempo computacional, o tempo utilizado pela heurística é muito menor que o tempo utilizado pelo modelo MIP. O tempo médio de execução da heurística é de 24,62 segundos, enquanto o tempo médio de execução do modelo MIP é de 1.524,86 segundos. Observando, por exemplo, a instâncias G1_Ex_1, com o modelo MIP em 3.600 segundos, o CPLEX encontrou uma solução ainda com 36% de gap. A heurística para essa mesma instância encontrou uma solução com 6% de desvio em relação à solução do modelo MIP em 41,85 segundos.

No Grupo 2, o modelo MIP não encontrou solução ótima para nenhuma das instâncias. O tempo de execução médio para o modelo foi de 3.600 segundos. O desvio da heurística em relação ao MIP foi maior para esse grupo (16,9%), assim como o tempo de execução, com tempo médio de 1.114,40 segundos. No entanto, para esse grupo a heurística conseguiu encontrar soluções melhores que as encontradas pelo MIP para a instância G2_Ex_4, com uma melhoria de 5,5% na solução do modelo em 1.257,35 segundos e para a instância G2_Ex_5, com uma melhoria de 0,3% em 630,87 segundos.

6. Conclusão

O problema de dimensionamento de lotes de processos, apesar de utilizado em várias indústrias atualmente, ainda não foi extensivamente explorado como o dimensionamento de lotes de produto. O modelo apresentado é uma generalização do modelo apresentado por Martínez e Toso (2015), que foi baseado no modelo de dimensionamento de lotes de produto do tipo GLSP.

Utilizando dimensões de problemas reais para as instâncias, esse modelo de programação inteira mista é difícil de ser solucionado pelo CPLEX. A heurística proposta para encontrar boas soluções em um tempo computacional menor foi a *relax-and-fix forward* particionada por períodos. Essa heurística demonstrou boas soluções para os dois grupos de instâncias, com um tempo computacional expressivamente menor que o utilizado pelo modelo. O grupo 1 apresentou um desvio médio de 10,5% em relação as soluções de modelo, com um tempo de execução médio de 24,62 segundos (tempo médio de execução do modelo foi de 1.524,86 segundos). O segundo grupo apresentou um desvio médio de 16,9% em relação às soluções de modelo, com um tempo de execução de 1.114,40 segundos (tempo médio de execução do modelo foi de 3.600 segundos). Em duas instâncias do segundo grupo foram encontraram soluções melhores que as do modelo MIP em um tempo computacional muito menor.

Essa heurística por apresentar soluções de boa qualidade em um tempo computacional menor

pode ser utilizada caso seja necessária uma resposta factível de boa qualidade de forma rápida ou ainda para ser utilizada como solução inicial para alguma outra heurística de melhoria, como por exemplo, a *fix-and-optimize*.

Referências

- ALVES, F. D. F., NOGUEIRA, T. H., HENRIQUES, R. D. S., CASTRO, P. V. D. Integrated lot sizing and production scheduling formulations: an application in a refractory cement industry. **Gestão & Produção**, v. 23, n. 1, p. 204-218, 2016.
- ARAUJO, S. A., ARENALES, M. N., CLARK, A. R. Joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing with sequence-dependent setups. **Journal of Heuristics**, v. 13, n. 4, p. 337- 358, 2007.
- BALDO, T. A.; SANTOS, M.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. An optimization approach for the lot sizing and scheduling problem in the brewery industry. **Computers & Industrial Engineering**, v. 72, p. 58-71, 2014.
- BOONMEE, A., SETHANAN, K. A GLNPSO for multi-level capacitated lot-sizing and scheduling problem in the poultry industry. **European Journal of Operational Research**, v. 250, n. 2, p. 652-665, 2016.
- CLAASSEN, G. D. H., GERDESSEN, J. C., HENDRIX, E. M., VAN DER VORST, J. G. (2016). On production planning and scheduling in food processing industry: Modelling non-triangular setups and product decay. **Computers & Operations Research**, v. 76, p. 147-154, 2016
- CLARK, A. R.; MORABITO, R.; TOSO, E. A. V. Production setup-sequencing and lot-sizing at an animal nutrition plant through ATSP subtour elimination and patching. **Journal of Scheduling**, v. 13, p. 111-121, 2010.
- CHUNPENG, L.; GANG, R. A strategy for the integration of production planning and scheduling in refineries under uncertainty. **Chinese Journal of Chemical Engineering**, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 113-127, 2009.
- FERREIRA, D.; MORABITO, R.; RANGEL, S. Solution approaches for the soft drink integrated production lot sizing and scheduling problem. **European Journal of Operational Research**, v. 196, n. 2, p. 697-706, 2009.
- FERREIRA, D.; CLARK, A.; ALMADA-LOBO, B.; MORABITO, R. Single-stage formulations for synchronised two-stage lot sizing and scheduling in soft drink production. **Intern. Journal of Production Economics**, v. 136, n. 2, p. 255-265, 2012.
- GAUDREAULT, J.; FRAYRET, J.; ROUSEEAU, A.; D'AMOURS, S. Combined planning and scheduling in a divergent production system with co-production: A case study in the lumber industry. **Computers & Operations Research**, v. 38, p. 1238-1250, 2011.
- GÖTHE-LUNDGREN, M.; T. LUNDGREN, J.; A. PERSSON, J. An optimization model for refinery production scheduling. **International Journal of Production Economics**, v. 78, n. 3, p. 255-270, 2002.
- GUIMARÃES, L.; KLABJAN, D.; ALMADA-LOBO, B. Pricing, relaxing and fixing under lot sizing and scheduling. **European Journal of Operational Research**, v. 230, n. 2, p. 399-411, 2013.
- JOHNSON, L. A., MONTGOMERY, D. C. **Operations research in production planning, scheduling, and inventory control**. New York: Wiley, 1974.
- KARIMI, B.; GHOMI, S. M. T. F.; WILSON, J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. **The International Journal of Management Science**, v. 31, p. 365-378, 2003.
- LUCHE, J. R. D.; MORABITO, R. Otimização Na Programação Da Produção De Grãos Eletrofundidos : Um Estudo De Caso. **Gestão & Produção**, v. 12, n. 1, p. 135-149, 2005.
- LUCHE, J. R. D.; MORABITO, R.; PUREZA, V. Combining Process Selection and Lot Sizing Models for Production Scheduling of Electrofused Grains. **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, v. 26, n. 3, p. 421-443, 2009.
- MARTÍNEZ, K. Y.; TOSO, E. A. V. Planejamento da Produção na Indústria de Embalagens em polpa moldada. **Gestão & Produção**, 2015.
- MARTÍNEZ, K. Y. P.; TOSO, E. A. V.; MORABITO, R. Production planning in the molded pulp packaging industry. **Computers & Industrial Engineering**, n. May, 2016.

POCHET, Y.; WOLSEY, L. A. **Production Planning by Mixed Integer Programming**. Estados Unidos: Springer Science+Business, 2006. 493 p.

RAFIEI, R.; SANTA-EULALIA, L. A. D.; NOURELFATH, M. Production planning optimization in the wood remanufacturing mills using multi-stage stochastic programming. Bordeaux, 2016.

SAHINIDIS, N.; GROSSMANN, I. E. Reformulation of multiperiod milp models for planning and scheduling of chemical processes. **Computers & Chemical Engineering**, Elsevier, v. 15, n. 4, p. 255–272, 1991.

SAHINIDIS, N.; GROSSMANN, I. E. Reformulation of the multiperiod milp model for capacity expansion of chemical processes. **Operations Research**, INFORMS, v. 40, n. 1-supplement-1, p. S127–S144, 1992.

SEEANNER, F.; MEYR, H. Multi-stage simultaneous lot-sizing and scheduling for flow line production. **OR spectrum**, p. 1-41, 2013.

SHI, L.; JIANG, Y.; WANG, L.; HUANG, D. Refinery Production Scheduling Involving Operational Transitions of Mode Switching under Predictive Control System. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 53, p. 8155–8170, 2014.

TOSO, E. A. V.; MORABITO, R.; CLARK, A. R. Lot sizing and sequencing optimisation at an animal-feed plant. **Computers & Industrial Engineering**, v. 57, n. 3, p. 813–821, 2009.

WOLSEY, L. A. Mip modelling of changeovers in production planning and scheduling problems.

European Journal of Operational Research, Elsevier, v. 99, n. 1, p. 154–165, 1997.