

Uma Análise Comparativa de Métodos de Integração Numérica para a Solução de Equações Diferenciais: Estudo de Caso

Antonio Almeida De Sousa Neto (UTFPR-MD –Medianeira-PR) neto.sousa@hotmail.com.br

Diogo Marujo (UTFPR-MD –Medianeira-PR) diogomarujo@utfpr.edu.br

Joao Vitor Gerevini Kasper (UTFPR-MD –Medianeira-PR) joaovitorgk_21@hotmail.com

Resumo:

As equações diferenciais são frequentemente utilizadas para modelar o comportamento de sistemas dinâmicos nas áreas de engenharia, física, matemática, biologia e economia. Contudo, algumas equações diferenciais não apresentam solução analítica, ou seja, não podem ser obtidas através de funções algébricas elementares. Nesses casos, se faz necessária a utilização de métodos de integração numéricos, cujo objetivo é obter a solução aproximada do problema. Este artigo tem por objetivo comparar o desempenho de alguns métodos de integração numérica, considerando um circuito RLC série, cuja solução analítica da equação diferencial ordinária pode ser determinada.

Palavras chave: Equações Diferenciais, Métodos de Integração Numérica, Solução Numérica.

A Comparative Analysis of Numerical Integration Methods for the Solution of Differential Equations: Case Study

Abstract

Differential equations are often used to model the behavior of systems in the several areas of engineering, physics, mathematics, biology, and economics. However, some differential equations have no analytical solution, i.e., they can not be obtained through elementary algebraic functions. In such cases, it is necessary to use numerical integration methods, in order to obtain the approximate solution of the problem. This paper aims to compare the performance of some numerical integration methods, considering a series RLC circuit, whose analytical solution of the ordinary differential equation can be determined explicitly.

Key-words: Ordinary Differential Equations, Numerical Integration Methods, Numerical Solution.

1. Introdução

O modelo ou a modelagem é uma representação matemática-computacional de um sistema observado na prática, adequado dentro de suas limitações e simplificações às análises e estudos que se deseja (MILANO, 2010).

Um sistema é definido como um conjunto de componentes interconectados, que apresentam certas relações de causa e efeito e que atuam e interagem em conjunto, com um determinado objetivo (MOLINA DA SILVA, 2012). Os sistemas podem divididos em duas categorias: estáticos, cuja representação independe do tempo e é obtida através de equações algébricas e os dinâmicos, na qual a representação depende do tempo, isto é, é feita por meio de equações diferenciais ou por conjuntos algébrico-diferenciais (MARUJO, 2017).

As equações diferenciais (ED) apresentam diversas aplicações nas mais diversas áreas. Por exemplo, ED são utilizadas na física, química para modelar o decaimento radioativo (THOMAS, 2013). Na área de biologia/economia, as ED's são utilizadas para modelar a dinâmica populacional, como é o caso do trabalho de Jardim da Silva (2010), que utiliza os Malthus e Verhulst. A capitalização de investimentos podem ser modelada por meio de ED (BOYCE, W.; DIPRIMA, R, 2012). Em Engenharia Mecânica, por exemplo, as equações diferenciais são utilizadas na área de vibrações e no estudo de catenárias - curva assumida por um cabo flexível e inextensível (TEIXEIRA, 2012). Em Engenharia Elétrica, por sua vez, diversas são aplicações de equações diferenciais. Este é o dos circuitos elétricos compostos por elementos armazenadores de energia (capacitores e indutores), modelos de linhas de transmissão, sistemas de controle, entre outros. No caso da análise da estabilidade transitória de sistemas elétricos de potência, além da utilização de equações diferenciais, são utilizados métodos numéricos para obter a solução no domínio do tempo e, consequentemente, podem avaliar a estabilidade do sistema (MARUJO, 2017).

Uma questão a ser destacada, diz respeito ao fato de que a grande maioria das equações diferenciais não lineares não apresentam solução analítica, ou seja, não podem ser obtidas através de funções algébricas elementares. Nesses casos, considera-se no estudo de tais equações o valor numérico da resolução da equação diferencial para aquela condição, por meio da utilização de métodos de integração numérica. Assim, uma sucessão de pontos obtidos dessa forma constitui no espaço a trajetória da solução, embora não seja possível obtê-la analiticamente (LOPES, 2004).

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma análise comparativa de alguns métodos de integração numérica popularmente utilizados. Para isto, será considerado um circuito RLC série. A partir da determinação da solução analítica, esta será comparada com aquelas obtidas utilizando os métodos de integração de Euler, Runge-Kutta 3ª ordem, Runge-Kutta 4ª ordem e o Método Trapezoidal com previsor Runge-Kutta 4ª ordem. Como critério de comparação serão considerados os erros em comparação com a solução analítica. Ademais, será avaliado o impacto da alteração do passo de integração na qualidade da resposta.

O artigo é organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta alguns métodos de integração que serão utilizados no artigo. A seção 3 considera um circuito elétrico cuja solução exata é obtida analiticamente e comparada solução numérica. As considerações finais são apresentadas na Seção 4.

2. Metodologia

Diversos métodos de integração numérica estão disponíveis na literatura Franco (2007). Um fator de grande importância nestes métodos é o valor do passo de integração, que tem relação direta com o valor do erro de truncamento (erro cometido supondo que não existe erro nas iterações passadas) de cada método. Segundo Ruggiero (1996), outra característica que marca o método é se ele é de passo simples ou passo múltiplo, dizemos que um método é de passo simples se para calcularmos o valor da função em determinado ponto, utilizamos apenas valores passados, caso contrário, se utilizar valores atuais ou futuros o método é dito de passo múltiplo. Os métodos serão implementados para a forma padrão da equação diferencial abaixo:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

2.1. Euler

O método de Euler é um método de passo simples, onde os cálculos dos valores futuros da função dependem de uma aproximação da derivada no ponto anterior. A fórmula de recorrência é mostrada a seguir, juntamente com a do erro de truncamento. Segundo (FRANCO,2007):

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n) \quad (2)$$

$$E = \frac{h^2}{2} * y''(\xi) \quad (3)$$

Onde $x_n < \xi < x_{n+1}$. Onde ξ é um valor definido pelos teoremas de erro de truncamento que, caso fosse possível calculá-lo com precisão, teríamos um valor exato do erro cometido na iteração.

2.2 Runge-Kutta 3ª ordem

Assim como o método Euler, o Runge-Kutta 3ª ordem também é denominado como um método de passo simples, é fruto da série de Taylor com o truncamento ocorrendo na derivada de quarta ordem. Segundo (FRANCO,2007):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9} * K_1 + \frac{1}{3} * K_2 + \frac{4}{9} * K_3 \quad (4)$$

, onde:

$$K_1 = h * f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$K_2 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}) \quad (6)$$

$$K_3 = h * f(x_n + \frac{3}{4} * h, y_n + \frac{3}{4} * K_1) \quad (7)$$

O erro E é de difícil determinação exata. Contudo, por se tratar de um método derivado da série de Taylor o erro E é proporcional a $h^4 * y^{(IV)}(\xi)$.

2.3 Runge-Kutta 4ª ordem

Este método difere-se em relação ao de terceira ordem apenas na parte do truncamento, já que neste método o mesmo ocorre na derivada de quinta ordem. Segundo (FRANCO,2007):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} * K_1 + \frac{1}{3} * K_2 + \frac{1}{3} * K_3 + \frac{1}{6} * K_4 \quad (8)$$

onde:

$$K_1 = h * f(x_n, y_n) \quad (9)$$

$$K_2 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}) \quad (10)$$

$$K_3 = h * f(x_n + \frac{1}{2} * h, y_n + \frac{1}{2} * K_1) \quad (11)$$

$$K_4 = h * f(x_n + h, y_n + K_3) \quad (12)$$

Assim com o método anterior o erro é proporcional a $h^5 * y^{(V)}(\xi)$.

2.4 Método Trapezoidal com previsor Runge-Kutta 4ª ordem

Diferentemente dos três métodos anteriores, o Trapezoidal com previsor Runge-Kutta 4ª ordem tem como característica ser de passo múltiplo, apesar se tratar de um método implícito, pois o novo valor da função no ponto x_{n+1} depende de valores passados e atuais. O passo previsor é responsável por fornecer o valor da função y_{n+1} para que então o método utilizado como corretor, no caso Trapezoidal, inicie a iteração. Segundo (FRANCO,2007):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} * [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (13)$$

$$E = -\frac{h^3}{12} * y'''(\xi) \quad (14)$$

3. Resultados e Discussões

Para avaliar o comportamento dos métodos de integração supracitados foi considerado um circuito RLC série, isto é, um sistema composto pela conexão série de um capacitor, um indutor e um resistor. Além disso, foi considerado que a saída de interesse é corrente do circuito, quando na entrada é aplicado um degrau unitário. Os valores adotados para os elementos dos circuitos são: $R=12\Omega$, $L=2H$ e $C=0,1F$. A Figura 1 mostra o diagrama do circuito elétrico utilizado no estudo.

A escolha deste sistema não foi aleatória, já que a modelagem do circuito em questão resulta em uma equação diferencial ordinária (EDO), de segunda ordem, linear e com coeficientes constantes. Ademais, esta EDO permite comparar o desempenho dos métodos de integração, uma vez que a mesma possui solução exata, de forma analítica, conforme apresentado a seguir:

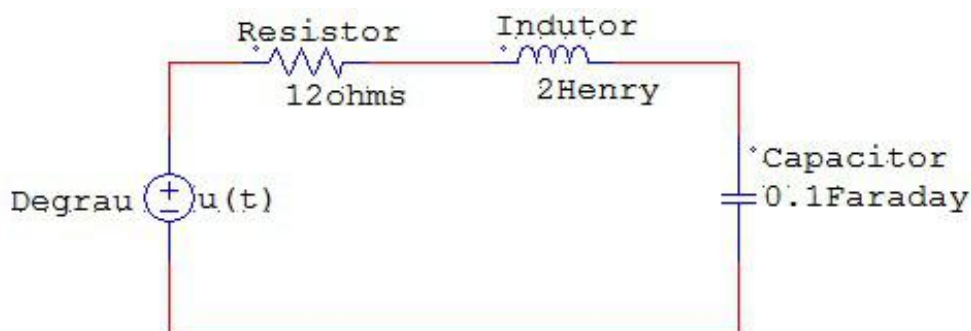


Figura 1- Circuito RLC série

3.1. Solução Analítica

Aplicando Lei de Kirchhoff das tensões ao circuito e sabendo que as relações entre tensão e corrente dos elementos são dadas pelas equações (15)-(17), foi obtida a equação íntegro-diferencial (18):

$$\text{Tensão no resistor:} \quad V_R(t) = R * i(t) \quad (15)$$

$$\text{Tensão no indutor:} \quad V_L = L * \frac{di(t)}{dt} \quad (16)$$

$$\text{Tensão no capacitor:} \quad V_C = \frac{1}{C} * \int_{-\infty}^t i(t) dt \quad (17)$$

$$u(t) = R * i(t) + L * \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} * \int_{-\infty}^t i(t) dt \quad (18)$$

Derivando (18) em ambos os lados e reordenando os termos, vem:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{du(t)}{dt} \quad (19)$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 6 \frac{di(t)}{dt} + 5i(t) = \frac{1}{2} \frac{du(t)}{dt} \quad (20)$$

Para comparar os métodos, a EDO mostrada na equação (20) foi solucionada analiticamente, considerando condições iniciais iguais a $i(0) = 0$ e $i'(0) = 0,5$. A solução analítica encontrada é mostrada

$$i(t) = -\frac{1}{8} * e^{-t} - \frac{1}{8} * e^{-5*t} \quad (21)$$

3.2. Solução Numérica

De posse da solução analítica representada pela equação (21), partiu-se para a aplicação de alguns métodos numéricos utilizados na área de engenharia elétrica para solução de equações diferenciais. Os métodos de integração escolhidos para solução numérica são aqueles apresentados na Seção 2. Cada um dos métodos de integração escolhidos foi implementado computacionalmente, em linhas código, utilizando o *software* MATLAB® ()

Para realizar a primeira análise, plotou-se o gráfico da resposta analítica em função do tempo (vide equação 21), conforme mostrado na Figura 2. Note que, conforme destacado a priori, foi considerada uma fonte de tensão tipo degrau unitário. A simulação foi realizada durante 10 segundos.

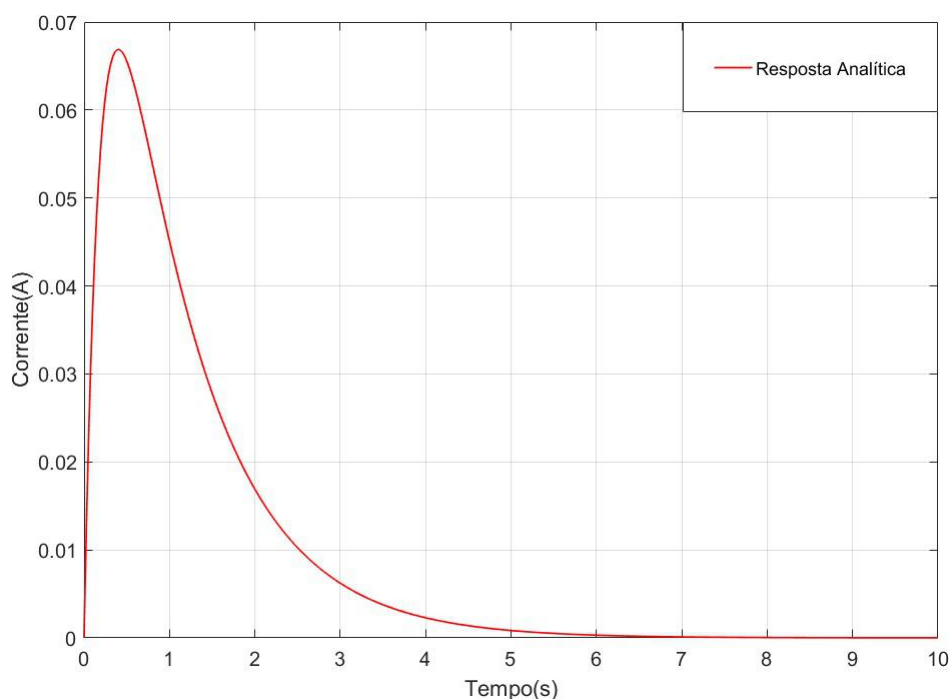


Figura 2-Resposta analítica

Em seguida, a equação diferencial ordinária representada pela equação (20) foi solucionada numericamente durante 10 segundos, considerando um passo de integração $h = 0,01$ segundos. Quando todas as respostas para a corrente no domínio do tempo foram sobrepostas em um mesmo gráfico, constatou-se que a diferença entre os métodos era muito pequena,

impossibilitando que uma distinção clara entre os métodos fosse possível. Por esta razão, este gráfico com todas as curvas sobrepostas foi omitido. Entretanto, visando comparar os resultados de todas as curvas ponto-a-ponto, a resposta nos primeiros 0,4 segundos são sumarizados Tabela 1, que se encontra em anexo. Além disso, foram plotados os gráficos para cada método separadamente, sempre considerando a como saída a corrente do circuito, conforme mostram as Figuras 3-6.

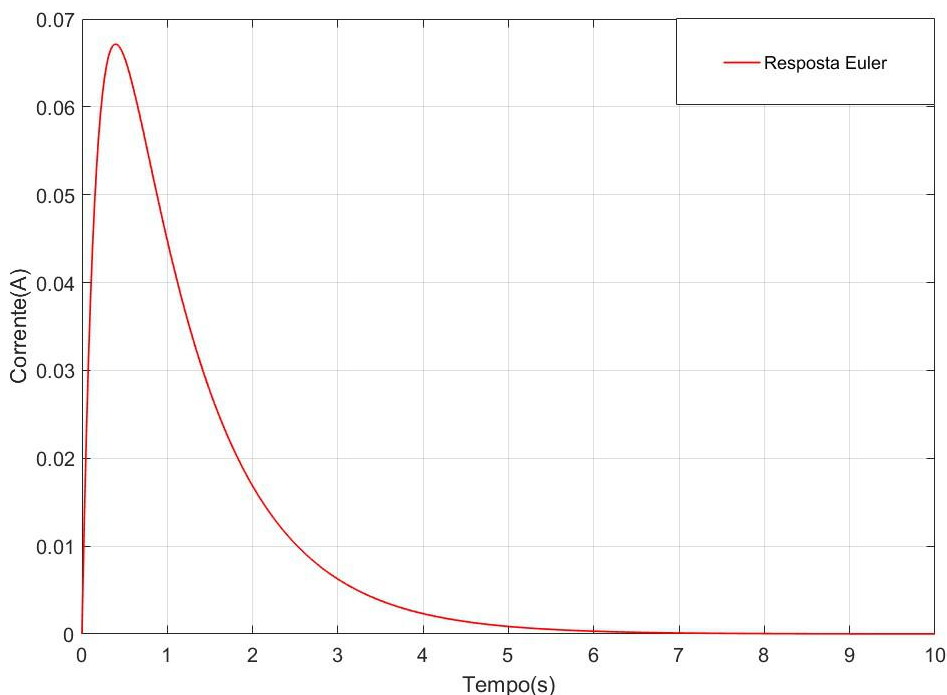


Figura 3- Corrente para o método de Euler

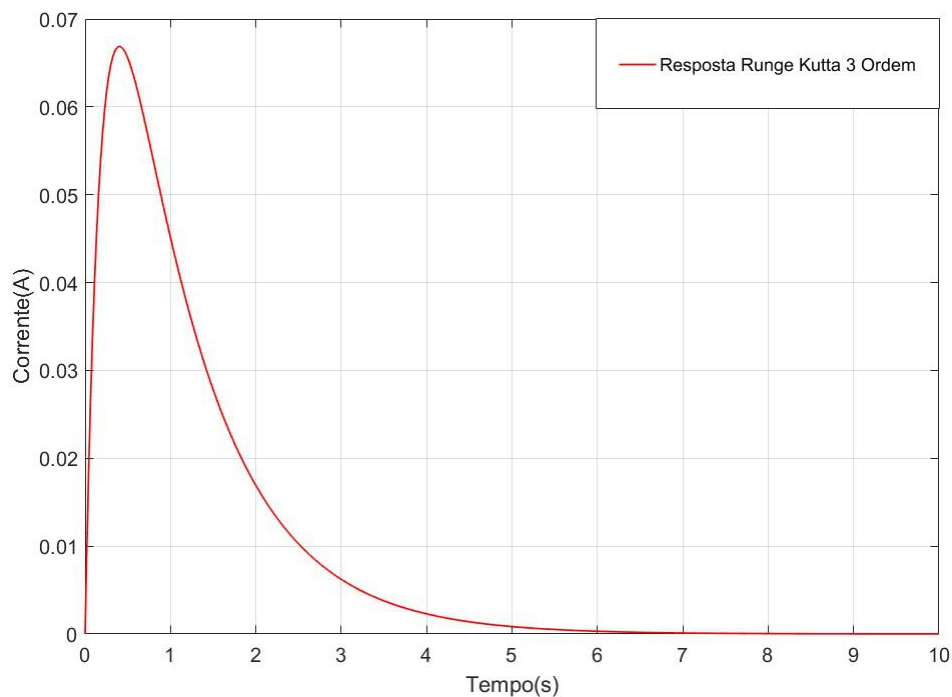


Figura 4- Corrente para Runge-Kutta 3ª ordem

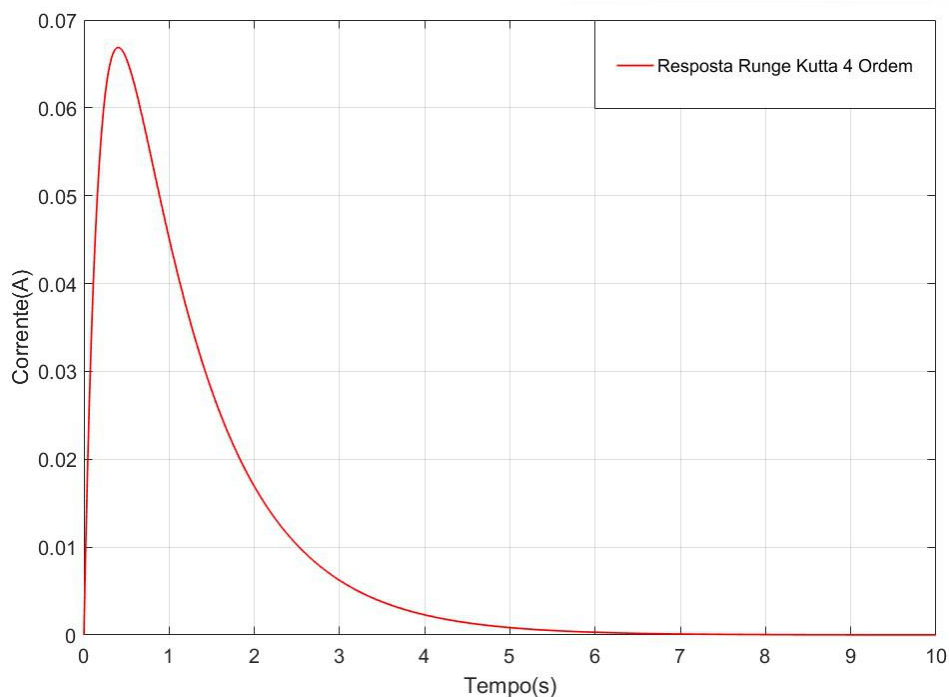


Figura 5- Corrente para Runge-Kutta 4ª ordem

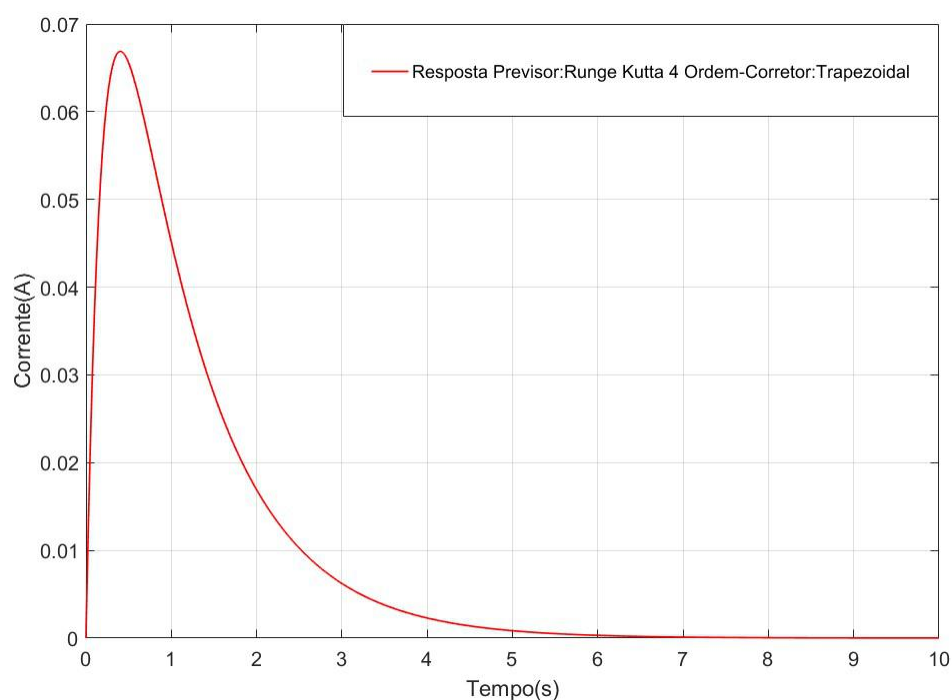


Figura 6- Corrente para o Método Trapezoidal com predictor Runge-Kutta 4ª ordem

A comparação entre os métodos foi então realizada de acordo com o erro relativo à resposta analítica, que cada método cometeu. Assim, optou-se por plotar a curva de erro relativo para as soluções numéricas em um mesmo gráfico e assim comparar os seguintes critérios: velocidade de convergência, maior erro relativo cometido e eficácia dos métodos, ou seja, a capacidade de se aproximar da resposta analítica para o ponto desejado. As curvas referentes aos erros para todos os métodos podem ser vistas na Figura 7.

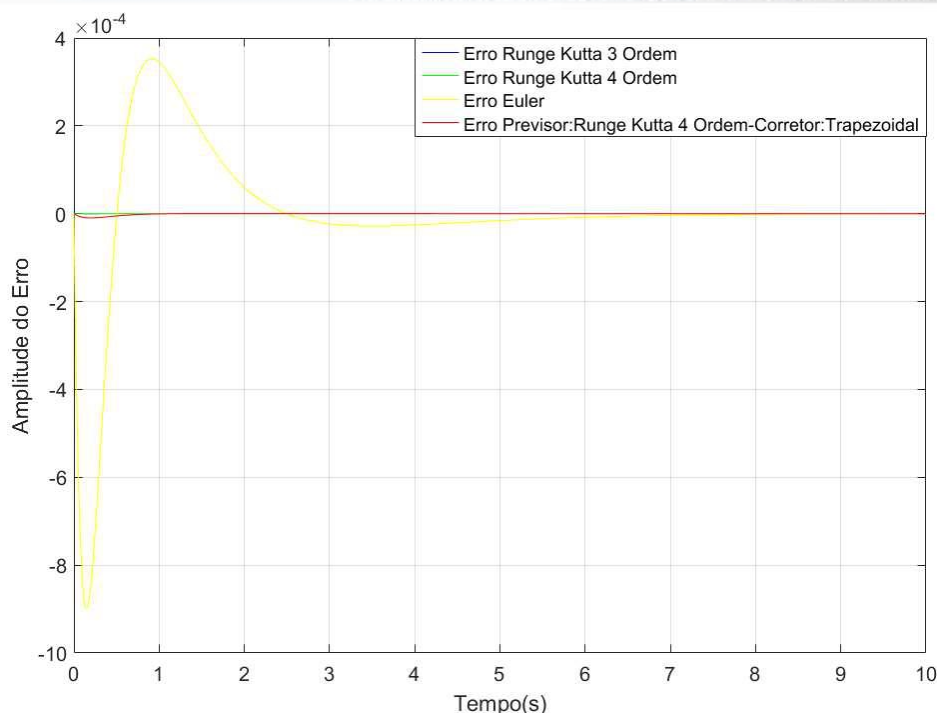


Figura 7- Erros para a corrente todos métodos

Com base nas curvas dos erros relacionadas a cada método numérico, evidenciou-se melhor em que momento cada método aproxima-se mais da resposta analítica ou qual método resulta no maior erro. O método de Euler resultou no maior erro entre todos os métodos aplicados e também possuiu a menor velocidade de convergência em comparação com os demais métodos.

Ao método Trapezoidal também pode-se observar que existe um erro associado, cuja magnitude é menor que no método de Euler. Além disso, o método Trapezoidal apresenta uma boa velocidade de convergência. Já os métodos de Runge-Kutta 3ª e 4ª, os que mais coincidem com o valor da corrente em todos os pontos desejados, comprovando que são os métodos mais aplicáveis no caso de análises que necessitem de pequenos erros e alta velocidade de convergência.

Além de possibilitar uma análise qualitativa de cada método, o gráfico dos erros permite avaliar que as fórmulas de erro para cada método, definidas na seção 2, estão em conformidade com a resposta para a corrente obtida. O erro associado ao método de Euler é proporcional a h^2 e foi o método que cometeu o maior erro, seguido pelo Trapezoidal que é proporcional a h^3 , isto é, um erro um pouco menor que o obtido via Euler. Portanto, quanto maior for o expoente de h na fórmula do erro, menor será o erro associado ao método. Por esta razão os métodos de Runge-Kutta tiveram os menores erros.

Visando analisar a influência do passo de integração h na comparação solução analítica x solução numérica, o valor do passo de integração foi alterado de $h = 0,01$ segundos para $h = 0,1$ segundo. Com este teste pode-se ainda verificar se o comportamento das curvas iria seguir as fórmulas dos erros e com isso respaldando nossa conclusão.

A Figura 8 apresenta comparação de todos os métodos de integração com a solução analítica, porém com $h = 0,1$. Já na Figura 9, são apresentados os erros. Novamente, o método de Euler resultou no maior erro, seguido pelo método Trapezoidal. Além disso, as respostas obtidas estão em conformidade com as fórmulas dos erros. Assim, comprovou-se que o erro obtido para cada método se torna cada vez maior a medida que aumentamos o passo de integração h . Desta

forma, quanto menor o valor de h , menor o erro. Por outro lado, quanto menor h , mais tempo de processamento e espaço de armazenamentos são requeridos. Em relação a eficácia dos métodos, o Runge-Kutta de 3ª e 4ª ordem continuou a oferecer um menor erro em relação aos demais.

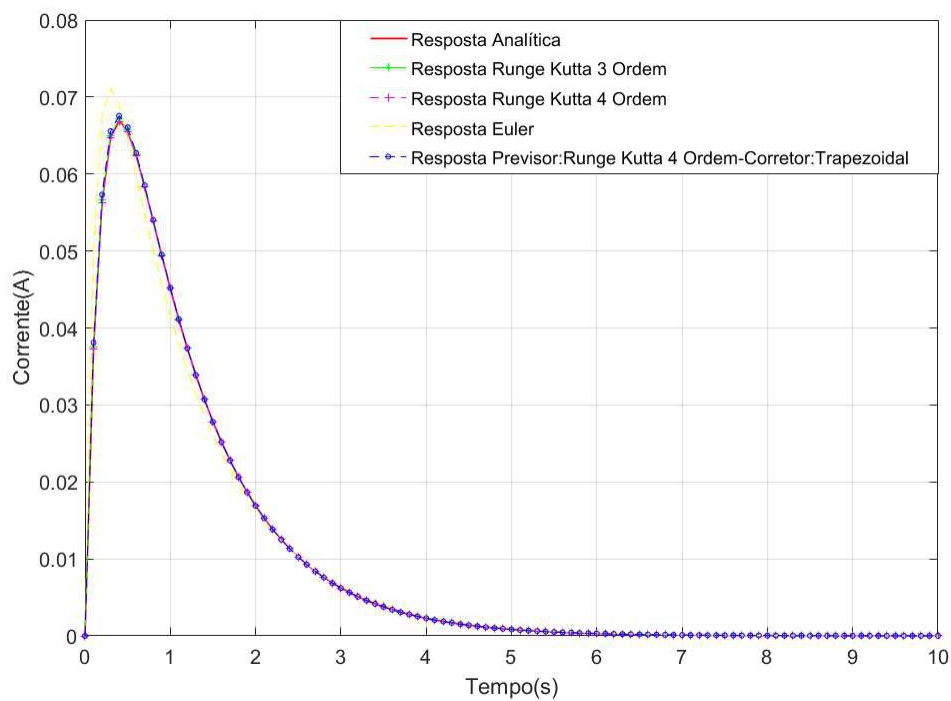


Figura 8-Todos os métodos para $h=0.1$

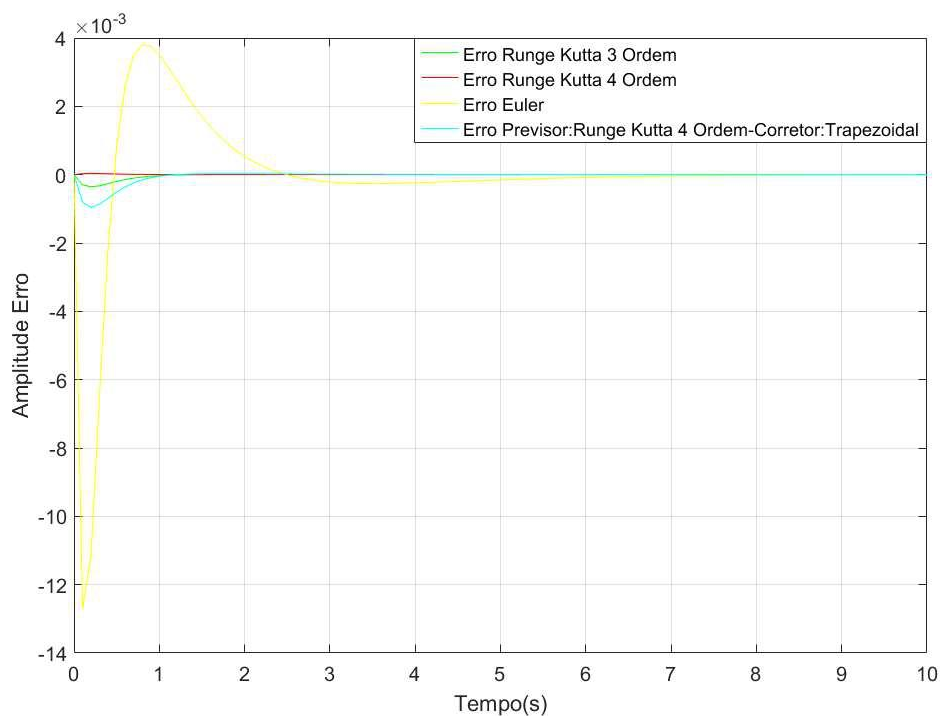


Figura 9- Gráficos erro para $h=0.1$

5. Conclusões

A aplicabilidade de métodos de integração numéricos torna-se atraente quando o sistema sob análise é de ordem elevada ou quando o mesmo é não-linear. Estes métodos permitem obter respostas numéricas em problemas com as características supracitadas, isto é, nos casos em que a equação diferencial não possui solução analítica ou a mesma é de difícil obtenção.

Diante deste contexto, este trabalho apresentou uma análise comparativa de alguns métodos de integração numérica aplicados a solução de uma equação diferencial associada a um circuito RLC série. Ao longo do artigo foram confrontados os métodos de Euler, Runge-Kutta 3ª ordem, Runge-Kutta 4ª ordem e o Método Trapezoidal com previsor Runge-Kutta 4ª ordem, no que diz respeito a qualidade da resposta e ao erro de truncamento. As equações de erro definidas a priori foram então respaldadas pelas curvas obtidas no domínio do tempo, pois em todas as ocasiões os gráficos estavam em conformidade com as fórmulas dos erros.

Em um segundo momento, abordou-se a utilização de diferentes passos de integração h , concluindo-se que seu valor altera o erro dos métodos numéricos utilizados para que solucionar a equação diferencial. Entretanto, mesmo alterando h , foi mostrado, para este estudo de caso, que a eficácia de alguns métodos não supera a dos outros simplesmente devido a essa alteração no passo de integração.

Referências

- BOYCE, W.; DIPRIMA, R.** *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9a Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- FRANCO, N. M. B.**; *Cálculo Numérico*. Vol. único, n. 12, p. 389-412, 2007.
- JARDIM DA SILVA, A.; SANCHES, L. C. F.**; *Aplicação de Equações Diferenciais no Estudo da Dinâmica Populacional de Ilha Solteira*, Anais do CNMAC 2010.
- LOPES, B. I. L.**; *Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência no Horizonte de Curto e Longo Prazos*. UNIFEI, Tese de Doutorado, 2004.
- MARUJO, D.**; *Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência com a Presença de Redes de Distribuição Ativas*, Tese de Doutorado, UNIFEI, 2017.
- MILANO, F.**; *Power System Modelling and Scripting*. Vol. único, Springer, 2010.
- MOLINA DA SILVA, R.**; *Introdução a Engenharia de Vibrações*, Edipucrs, Rio Grande do Sul, 2012.
- RUGGIERO, M. A. G.**; *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*. Vol. 2, n. 8, p. 319-320, 1996.
- TEIXEIRA, F. L.**; *Modelos Descritos por Equações Diferenciais Ordinárias*. Dissertação de Mestrado, UNESP 2012.
- THOMAS, L. R.**; *O Uso de Equações Diferenciais na Modelagem de Sistemas Naturais e Outros*, Trabalho de Conclusão de Curso, UnB, 2013.

ANEXO

Tempo (s)	Resposta Analítica	Runge-Kutta 3ª Ordem	Runge-Kutta 4ª Ordem	Euler	Previsor Runge-Kutta 4 Ordem - Corretor Trapezoidal
0	0	0	0	0	0
0,0100	0,0049	0,0049	0,0049	0,0050	0,0049
0,0200	0,0094	0,0094	0,0094	0,0097	0,0094
0,0300	0,0137	0,0137	0,0137	0,0141	0,0137
0,0400	0,0178	0,0178	0,0178	0,0182	0,0178
0,0500	0,0216	0,0216	0,0216	0,0221	0,0216
0,0600	0,0251	0,0251	0,0251	0,0258	0,0251
0,0700	0,0285	0,0285	0,0285	0,0292	0,0285
0,0800	0,0316	0,0316	0,0316	0,0324	0,0316
0,0900	0,0345	0,0345	0,0345	0,0353	0,0345
0,1000	0,0373	0,0373	0,0373	0,0381	0,0373
0,1100	0,0399	0,0399	0,0399	0,0407	0,0399
0,1200	0,0423	0,0423	0,0423	0,0431	0,0423
0,1300	0,0445	0,0445	0,0445	0,0454	0,0445
0,1400	0,0466	0,0466	0,0466	0,0475	0,0466
0,1500	0,0485	0,0485	0,0485	0,0494	0,0486
0,1600	0,0504	0,0504	0,0504	0,0512	0,0504
0,1700	0,0520	0,0520	0,0520	0,0529	0,0520
0,1800	0,0536	0,0536	0,0536	0,0545	0,0536
0,1900	0,0550	0,0550	0,0550	0,0559	0,0550
0,2000	0,0564	0,0564	0,0564	0,0572	0,0564
0,2100	0,0576	0,0576	0,0576	0,0584	0,0576
0,2200	0,0587	0,0587	0,0587	0,0595	0,0587
0,2300	0,0597	0,0597	0,0597	0,0605	0,0597
0,2400	0,0607	0,0607	0,0607	0,0614	0,0607
0,2500	0,0615	0,0615	0,0615	0,0623	0,0615
0,2600	0,0623	0,0623	0,0623	0,0630	0,0623
0,2700	0,0630	0,0630	0,0630	0,0637	0,0630
0,2800	0,0636	0,0636	0,0636	0,0643	0,0637
0,2900	0,0642	0,0642	0,0642	0,0648	0,0642
0,3000	0,0647	0,0647	0,0647	0,0653	0,0647
0,3100	0,0651	0,0652	0,0651	0,0657	0,0652
0,3200	0,0655	0,0655	0,0655	0,0660	0,0655
0,3300	0,0659	0,0659	0,0659	0,0663	0,0659
0,3400	0,0661	0,0661	0,0661	0,0666	0,0661
0,3500	0,0664	0,0664	0,0664	0,0668	0,0664
0,3600	0,0665	0,0665	0,0665	0,0669	0,0666
0,3700	0,0667	0,0667	0,0667	0,0670	0,0667
0,3800	0,0668	0,0668	0,0668	0,0671	0,0668
0,3900	0,0668	0,0668	0,0668	0,0671	0,0669
0,4000	0,0669	0,0669	0,0669	0,0671	0,0669

Tabela 1 – Valores obtidos para a corrente no intervalo de 0 a 0,4 segundos para $h=0,01$.