

Uma abordagem alternativa para problemas de substituição de equipamentos por meio de funções contínuas e análise não suave

CESCA, Igor Gimenes (CEA/PUC-CAMPINAS e IEE/USP) igcesca@gmail.com

Resumo:

O problema de substituição de equipamentos é analisado tradicionalmente por duas metodologias discretas: programação dinâmica e indicadores de fluxo de caixa. Neste trabalho, no entanto, os autores utilizam uma abordagem com funções contínuas para resolver esse tipo de problema. No processo de estabelecê-las, chegou-se em funções não diferenciáveis (no sentido clássico) para modelar custos de ativos físicos. Logo, foi utilizada uma análise não suave para tais funções. Assim, foi possível determinar o valor de vida econômica dos ativos em diversas situações, conforme variam os custos de manutenção, o valor de aquisição, a taxa de desvalorização e, por último, a taxa de desconto utilizada.

Palavras chave: Vida econômica de ativos físicos, Substituição de equipamentos, Engenharia econômica, Análise não suave.

An alternative approach to equipment replacement problems through continuous functions and non-smooth analysis

Abstract

The problem of equipment replacement is traditionally analyzed by two discrete methods: dynamic programming and cash flow indicators. Nevertheless, in this paper, the authors use continuous functions to solve the problem. In the process of establishing such functions, they found non-differentiable function in the classical sense to model the physical assets. Therefore, a non-smooth analysis for such functions was carried out. Thus, it was possible to determine the value of economic life of assets in different situations, as maintenance costs vary, as well as acquisition and maintenance costs and the discount rate.

Key-words: Physical asset's economic life, Equipment replacement, Engineering economics, Non-smooth analysis.

1. Introdução

Os problemas de substituição de equipamentos, os quais envolvem a determinação do momento ótimo de reposição de ativos físicos e também a determinação de vida econômica, são clássicos na engenharia de produção e na econômica. Suas origens são na década de 1950. Uma abordagem na resolução desses problemas é utilizar algoritmos de programação dinâmica (BELLMAN, 1955), (WADDEL, 1983), (HARTMAN, 2004), (ABENSUR, 2015), (CESCA, 2017), enquanto outra é de utilizar indicadores de fluxo de caixa (ALCHIAN, 1958), (LONGO; ZABONETI, 1989), (SULLIVAN *et al*, 2002), (DHILLON, 2010). Por ambas as técnicas, as premissas do problema – como por exemplo, tempo, custo de aquisição

e custos de manutenção – são modeladas por modelos matemáticos discretos.

Por uma revisão de literatura feita pelos autores, percebeu-se que a minoria dos trabalhos sobre esta temática utilizou modelos matemáticos contínuos. Em geral, quando foi feito uso de uma abordagem contínua, esta considerando que os custos de manutenção e a desvalorização do ativo eram estocásticos e modelados por movimento geométrico browniano, como por exemplo, em YE (1990) e ZAMBUJAL-OLIVEIRA e DUQUE (2011).

Já neste artigo, os autores partem dos indicadores de fluxo de caixa, os quais são utilizados em casos discretos, e os transformam em funções contínuas. Dessa forma, é conduzido um estudo para determinar a vida econômica de equipamentos, a fim de que os resultados sejam mais precisos para orientação na substituição de equipamentos.

2. Referencial Teórico

Para o funcionamento de equipamentos (ativos físicos em geral) não serem comprometidos são necessárias manutenções – de caráter preventivo e também, quando necessário, corretivo –, as quais apresentam custos. O conhecimento destes é importante, uma vez que, com o passar do tempo, estes podem aumentar e equivaler a várias vezes o valor do custo de aquisição do ativo (BROWN; YANUCK, 1985). Dessa forma, a aquisição de um ativo não deve ser decidida mediante apenas o seu custo de aquisição, mas por meio de um estudo que leve em conta as despesas de manutenção ao longo de toda sua vida útil também (DHILLON, 2010).

Se um equipamento for mantido por um período muito grande, as despesas de manutenção terão valores muito elevados. Por outro lado, se for trocado muito cedo, o custo de capital não terá sido amortizado. Logo, parte do investimento na aquisição do ativo será perdida (MARQUES, 2003), (ADKINS; PAXSON, 2013). Dessa forma, convém determinar o momento ideal de troca de equipamentos. Assim, surge o conceito de vida econômica, o qual é o momento ótimo de reposição do ativo.

O procedimento tradicional para encontrar a vida econômica é por meio de indicadores de fluxo de caixa. De acordo com Ross *et al* (2002), a demonstração em fluxo de caixa ajuda a explicar a variação dos saldos de caixas e aplicações financeiras. Logo, esta metodologia é utilizada para facilitar a avaliação do impacto das entradas e saídas de caixa em diferentes anos. O critério mais utilizado é a anuidade equivalente (AE), também chamado de custo anual uniforme equivalente (CAUE). A ideia deste critério é converter os valores de um fluxo de caixa irregular em uma série de pagamentos anuais idênticos. Assim, o valor de anuidades equivalentes é calculado por meio da equação (1).

$$AE(n) = VPL * \left[\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right] \quad (1)$$

Na equação (1), i representa a taxa mínima de atratividade, n é o prazo de duração do projeto e VPL (valor presente líquido) é o somatório das entradas e saídas de caixas descontadas para a data zero pela taxa de desconto i .

Agora, definem-se alguns conceitos: custo equivalente de capital, custo equivalente de manutenção e, por último, custo equivalente de propriedade. Todos esses conceitos de acordo com Park (2002), os quais serão utilizados para a metodologia deste artigo na seção seguinte.

- Custo equivalente de capital (CEC): O custo de capital possui duas componentes: custo de aquisição (CA) e valor residual (VR(n)) do ativo, tal que o primeiro possui

um valor fixo e o segundo é variável em relação ao tempo. Calcula-se a diferença das anuidades equivalentes de cada uma das componentes, conforme a equação (2).

$$CEC(n) = \left(\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right) \left(CA - \sum \frac{VR(n)}{(1 + i)^n} \right) \quad (2)$$

- Custo equivalente de manutenção (CEM): Para encontrar o custo equivalente de manutenção, primeiramente é necessário calcular o valor presente do somatório da série de custos de manutenção (CM(n)) ao longo do tempo. Feito isso, calcula-se a AE do valor encontrado, conforme é possível ver na equação (3).

$$CEM(n) = \left(\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right) \left(\sum \frac{CM(n)}{(1 + i)^n} \right) \quad (3)$$

- Custo equivalente de propriedade (CEP): O custo equivalente de propriedade de um ativo é a soma dos custos de capital e de manutenção equivalentes, conforme é possível ver na equação (4).

$$CEP(n) = \left(\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right) \left[\left(CA - \frac{VR(n)}{(1 + i)^n} \right) + \sum \frac{CM(n)}{(1 + i)^n} \right] \quad (4)$$

É possível ver na Figura 1 uma representação gráfica de como se comportam as curvas para um exemplo.

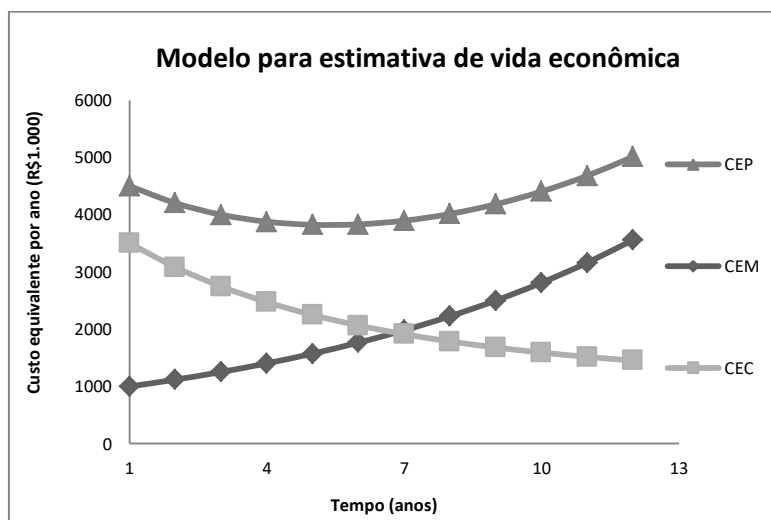


Figura 1 – Modelo para estimativa de vida econômica

Na Figura 1 encontram-se os custos (no eixo vertical) das três variáveis ao longo do tempo (no eixo horizontal). Percebe-se que o custo equivalente de manutenção aumenta com o tempo, enquanto o custo equivalente de capital diminui, tal que a soma de ambas as curvas resulta na curva de custo equivalente de propriedade do ativo. Nesta curva, o ponto de valor mínimo representa o período ótimo de uso do ativo; isto é, a vida econômica do ativo, a qual, para o exemplo, é de cinco anos. Assim, este é o período ótimo em que um ativo deve ser utilizado.

3. Procedimentos metodológicos

A metodologia neste trabalho consistiu em transformar os critérios clássicos de fluxo de caixa descontado em funções contínuas por meio de fundamentos do cálculo. Dessa maneira, as seguintes equações são formalizadas:

- Curva de custo equivalente de capital, conforme mostra a equação (5).

$$CEC = \left(\frac{e^r - 1}{e^{rt} - 1} e^{rt} \right) (A - R(t) * e^{-rt}) \quad (5)$$

- Curva de custo equivalente de manutenção, conforme mostra a equação (6).

$$CEM = \left(\frac{e^r - 1}{e^{rt} - 1} e^{rt} \right) \int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt \quad (6)$$

Na qual:

- $\left(\frac{e^r - 1}{e^{rt} - 1} e^{rt} \right)$ é o fator de equivalência de fluxo de caixa presente em anuidades regulares para o caso contínuo. Além disso, r é a taxa de juros, tal que $0 \leq r \leq 1$.
- $M(t)$ representa os gastos de manutenção ao longo do tempo. Essa função, conforme Cesca (2012), pode ser encontrada por meio de regressão linear a partir de coleta de dados de custos de manutenções de ativos. Além disso, é aceitável que $M(t)$ seja linear e crescente, uma vez que um dos pressupostos dos custos de manutenção é que estes sejam maiores a cada ano. Por isso, define-se $M(t) = at$, com $a > 0$.

Entretanto, $M(t)$ pode assumir outras formas, sem perda de generalidade para as equações, uma vez que a integral $\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt$ representa a transformada de Laplace da função $M(t)$ (BUSER, 1986).

- A representa o custo de aquisição do ativo;
- $R(t)$ é o valor de revenda do equipamento no ano de substituição t . Uma vez que ativos são vulneráveis à depreciação física, espera-se que $R(t)$ seja decrescente. Contudo, $R(t)$ é sempre positiva. Afinal, é impossível o ativo ter valor negativo. Assim, a função é definida da seguinte forma:

$$R(t) = \begin{cases} A - bt & , 0 \leq t < A/b \\ 0 & , t \geq A/b \end{cases}, \text{ tal que } b \text{ é a taxa de desvalorização do ativo a cada ano e } b > 0 \text{ e } A > 0.$$

Em relação ao comportamento da função $R(t)$, percebe-se que não se trata de uma função analítica. O motivo da escolha desta função para modelar o valor de renda dos ativos foi que com esta função fica determinada a função de vida econômica para o caso mais difícil de se modelar. Caso se encontre na prática alguma função de valor de revenda analítica, a modelagem fica mais fácil. De qualquer forma, a formulação sugerida aqui neste artigo, modela ambos os casos de a função $R(t)$ ser ou não analítica.

Assim, o CEP fica formalizado da seguinte forma:

$$CEP = CEM + CEC = \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \right)$$

Logo, define-se a equação (7):

$$AE(t) = \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \right) \quad (7)$$

Ocorre que, dado o comportamento de $R(t)$, a qual não é diferenciável em $t = A/b$, convém analisar a equação (7) em duas partes, sendo o *Regime 1*, $0 \leq t < A/b$, e o *Regime 2*, $t \geq A/b$. Dessa maneira, a equação (7) é reescrita da seguinte maneira:

$$AE(t) = \begin{cases} \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A - R(t) * e^{-rt} \right) & , 0 \leq t < A/b \\ \left[\frac{(e^r - 1) * e^{rt}}{e^{rt} - 1} \right] * \left(\int_0^t (M(t) * e^{-rt}) dt + A \right) & , t \geq A/b \end{cases} \quad (8)$$

Sendo a primeira parte referente ao *Regime 1* e a segunda ao *Regime 2*. É importante comparar a equação (1) com a (7). Na primeira, é calculada a anuidade equivalente em função de n de forma discreta. Sendo assim, $AE(n)$ não está definida para $n = 0$, já na segunda equação, $AE(t)$ é contínua. Dessa maneira, embora haja um “salto” em $t = 0$, como $\lim_{t \rightarrow 0} AE(t) = AE(0)$, então $AE(t)$ é contínua em $t = 0$. Além disso, é importante observar que $\lim_{t \rightarrow A/b^+} AE(t) = \lim_{t \rightarrow A/b^-} AE(t)$. Portanto, a função é contínua em $t = A/b$.

3.1 Modelagem no Regime 1

Nesta seção será analisada a equação de anuidade equivalente para o *Regime 1*, ou seja, para quando $0 \leq t < A/b$. Assim, simplificando a equação (8) referente ao *Regime 1*, obtém-se a seguinte expressão, definida pela equação (9):

$$AE(t) = \left(\frac{(e^r - 1)}{r^2} \right) \left(\frac{rt(br - a)}{e^{rt} - 1} + a + Ar^2 \right) \quad (9)$$

Em seguida, deriva-se a função para encontrar os pontos críticos e depois avaliar se estes são pontos de mínimo, conforme é possível observar na equação (10).

$$\frac{dAE}{dt}(t) = \left(\frac{(e^r - 1)}{r(e^{rt} - 1)^2} \right) (e^{rt}(rt - 1) + 1)(a - br) \quad (10)$$

Nesse caso, há duas situações em que $\frac{dAE}{dt}(t) = 0$:

(1) $(a - br) = 0$.

Esta solução implica em $AE'(t) = 0$, para qualquer t pertencente ao domínio de AE . Logo, qualquer t no domínio de AE é ponto crítico. Contudo, para um ponto crítico $AE(t_0)$ ser avaliado como mínimo de uma função é necessário que ocorra $AE''(t_0) > 0$ e $AE'(t_0) = 0$. Como neste caso $AE''(t) = 0$, logo esta situação não é válida como mínimo da função $AE(t)$ em problemas de vida econômica.

(2) $(e^{rt}(rt - 1) + 1) = 0$

Nesta situação, ocorre que $(e^{rt}(rt - 1) + 1) = 0$, quando $t = 0$. Contudo, quando se analisa a equação (10) por completo, tem-se $\frac{0}{0}$, ou seja, uma indeterminação.

Agora, continua-se o estudo da função $AE(t)$ no *Regime 1*, analisando se ela possui comportamento crescente, decrescente ou constante neste intervalo. Sendo assim, reescreve-se a equação (9) de acordo com a seguinte forma:

$$AE(t) = \left(\frac{(e^r - 1)}{r^2} \right) (a + Ar^2) + \left(\frac{(e^r - 1)}{r^2} \right) \left(\frac{rt(br - a)}{e^{rt} - 1} \right)$$

Depois, definem-se as seguintes funções $f(t)$ e $g(t)$ no intervalo de $0 \leq t < A/b$:

$$f(t) = \left(\frac{(e^r - 1)}{r^2} \right) (a + Ar^2) \quad (11)$$

$$g(t) = \left(\frac{(e^r - 1)}{r^2} \right) \left(\frac{rt}{e^{rt} - 1} \right) (br - a) \quad (12)$$

Tais que,

$$AE(t) = f(t) + g(t) \quad (13)$$

Na equação (11), $f(t)$ é sempre constante para qualquer valor de t . Já na equação (12), por sua vez, $g(t)$ varia conforme o valor de t . Logo, convém analisar o comportamento desta última função. Para analisar o comportamento de uma função, convém sempre derivá-la, conforme é possível ver na equação (14).

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{(e^r - 1)r}{r^2} (a - br)(e^{rt}(rt - 1) + 1) \quad (14)$$

Ocorre que o termo $(e^{rt}(rt - 1) + 1)$ é sempre positivo para $t \geq 0$. Sendo assim, o comportamento de $g(t)$ depende exclusivamente de $(a - br)$, tal que b é a taxa de desvalorização do ativo, r a taxa de desconto utilizada e a o coeficiente da função de custos de manutenção $M(t)$. Dessa maneira, se $br = a$, ou se $br > a$, ou se $br < a$, a função $g(t)$ possui o seguinte comportamento, conforme pode ser observado em (15):

$$\begin{cases} br = a, & g(t) \rightarrow \text{constante} \\ br > a, & g(t) \rightarrow \text{decrecente} \\ br < a, & g(t) \rightarrow \text{crescente} \end{cases} \quad (15)$$

Consequentemente, como $f(t)$, na equação (11), é constante, a equação (13), da função $AE(t)$, possui o mesmo comportamento de $g(t)$. Portanto, no *Regime 1*, $AE(t)$ possui uma das três seguintes possíveis funções, conforme é possível ver na Figura 2.

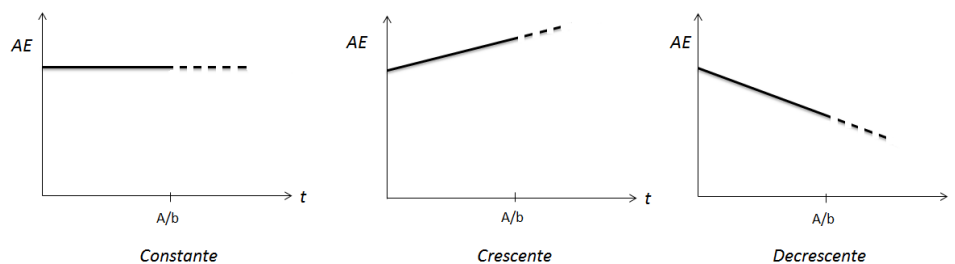


Figura 2 – Comportamento da função $AE(t)$ no Regime 1

Na Figura 2, é possível ver os possíveis comportamentos da função $AE(t)$ na região de $0 \leq t < A/b$, os quais são crescente, decrescente e constante. Contudo, o comportamento constante da função não é observável para um caso real. A justificativa está no fato de que uma vez que $a - br = 0$, então temos que, conforme a equação (16):

$$a = br \quad (16)$$

A equação (16) é representada graficamente, conforme é possível ver na Figura 3.

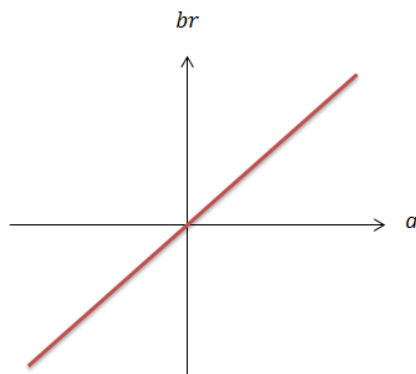


Figura 3 – Representação da equação (16) no plano

Na Figura 3, é possível observar o plano formado pelos eixos com os valores de a e br . Percebe-se que qualquer ponto acima da reta implica em $br > a$, já qualquer ponto abaixo da reta implica em $br < a$ e, por último, qualquer ponto na reta implica em $br = a$.

Uma vez que em um plano toda reta tem área nula, enquanto o plano tem área infinita. Logo, a chance de um ponto cair aleatoriamente na reta é de nula. Por isso, a probabilidade de a função $AE(t)$ ser constante no *Regime 1*, para um caso real, é zero. Assim, conclui-se que a função $AE(t)$ no intervalo $[0, A/b[$ possui um comportamento ou crescente ou decrescente.

3.2 Modelagem no Regime 2

No *Regime 2*, será analisado o comportamento da função $AE(t)$ para $t > A/b$. Sendo assim, define-se a equação (17), simplificando a equação (8) para esta região:

$$AE(t) = \frac{(-1 + e^r)}{(-1 + e^{rt})r^2} (e^{rt}(a + Ar^2) - a(1 + rt)) \quad (17)$$

Calculando a derivada de (17) para encontrar os pontos críticos, temos que:

$$\frac{dAE}{dt}(t) = \frac{(-1 + e^r)}{r(-1 + e^{rt})^2} (a - e^{rt}(-art + a + Ar^2)) \quad (18)$$

Dessa maneira, a fim de facilitar o entendimento, define-se:

$$h(t) = (a - e^{rt}(-art + a + Ar^2)) \quad (19)$$

$$\text{tal que, } \frac{dAE}{dt}(t) = \frac{(-1+e^r)}{r(-1+e^{rt})^2} * h(t)$$

Então, como $\frac{(-1+e^r)}{r(-1+e^{rt})^2} > 0$, para qualquer valor t em $t > A/b$, então se calcula $h(t) = 0$, a fim de encontrar os pontos críticos da equação (18).

$$\text{Para isso, sejam } \tau = rt \text{ e } c = \frac{Ar^2}{a}.$$

Dessa maneira, reescreve-se a equação (19) da seguinte maneira:

$$h(\tau) = 1 - e^\tau(-\tau + 1 + c) \quad (20)$$

Assim, iguala-se a equação (20) a zero, a fim de se encontrar os pontos críticos nela.

$$1 - e^\tau(-\tau + 1 + c) = 0.$$

Resultando em:

$$c = \frac{1 - e^\tau + \tau e^\tau}{e^\tau} \quad (21)$$

Agora, define-se a seguinte função $p(\tau)$, conforme é possível ver na equação (22):

$$p(\tau) = \frac{1 - e^\tau + \tau e^\tau}{e^\tau} \quad (22)$$

Então, a função $h(t)$, na equação (19), é nula se, e somente se, $p(\tau) = c$.

Nisso, pode-se afirmar a seguinte relação: se $p(rt_0) = c$, então $t_0 > A/b$, segue que:

$$\begin{aligned} t_0 > \frac{A}{b} &\Leftrightarrow rt_0 > r \frac{A}{b} \Leftrightarrow p(rt_0) > p\left(r \frac{A}{b}\right) \Leftrightarrow c > \left(1 - e^{-r \frac{A}{b}} + r \frac{A}{b} e^{-r \frac{A}{b}}\right) e^{-r \frac{A}{b}} \Leftrightarrow c > \\ &\left(e^{-r \frac{A}{b}} - 1 + r \frac{A}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{Ar^2}{a} > \left(e^{-r \frac{A}{b}} - 1 + r \frac{A}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{Ar^2}{a} > \left(e^{-r \frac{A}{b}} - 1 + r \frac{A}{b}\right) \Leftrightarrow \\ &\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r \frac{A}{b}} - 1\right) + Ar} > a \end{aligned} \quad (23)$$

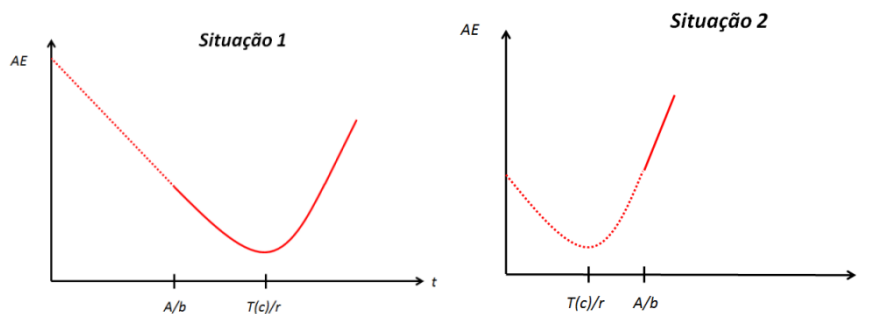
Sendo assim, conclui-se que se existe um t_0 , tal que este seja solução da equação (19) e $t_0 > A/b$, então uma condição para existência deste ponto na equação (19) é expressa pela equação (23).

Por fim, o ponto crítico encontrado – com o *software Wolfram Mathematica 8.0*, pois se trata de uma função não diferenciável no sentido clássico – é:

$$t = \frac{T(c)}{r} = \frac{W_0(-e^{-c-1}) + c + 1}{r} \quad (24)$$

Dessa maneira, é possível determinar o ponto crítico de qualquer ativo físico, uma vez que se possuam os valores de A , r e a . Além disso, é importante destacar que na equação (24), W_0 representa a parte injetora da função multivalorada W-Lambert (para mais informações sobre esta função ver Corless *et al* (1996)). Assim, define-se o ponto de mínimo do equipamento no *Regime 2*.

Na Figura 4 é possível ver como ficam as possíveis curvas da função $AE(t)$.



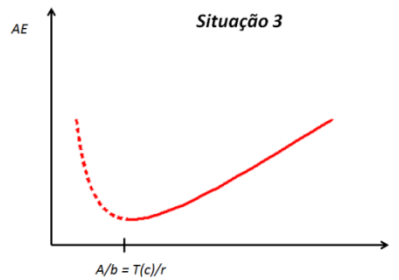


Figura 4 – Comportamento da função $AE(t)$ no Regime 2

Na Figura 4, observa-se as possíveis curvas da função $AE(t)$ no *Regime 2*. Na Situação 1, $T(c)/r > A/b$. Logo, o ponto de vida econômica está no *Regime 2*. Por outro lado, na Situação 2, $T(c)/r < A/b$. Logo, o mínimo da função não está no *Regime 2*. Por último, na Situação 3, $T(c)/r = A/b$, o ponto crítico do *Regime 2* está no ínfimo do intervalo $\left[\frac{A}{b}, \infty\right]$.

Percebe-se que é possível a existência de pontos de mínimo nos dois regimes. Sendo assim, precisam-se analisar ambos os regimes juntos e comparar os pontos críticos de cada região, a fim de se estabelecer qual o mínimo comum às duas regiões, ou seja, o mínimo global da função. Este ponto será o ponto de vida econômica do ativo. Para isso, primeiramente, serão analisados os casos em que a função $AE(t)$ é crescente no *Regime 1*. Dessa maneira, dado que

$AE(0) < AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$, então

$$\begin{aligned} \frac{(-1+e^r)(b+Ar)}{r} &< \frac{(e^r-1)}{r^2} \left(a + Ar^2 + a * W_0 \left(-e^{-\frac{a+Ar^2}{a}} \right) \right) \Leftrightarrow \\ \frac{r(Ar+b)}{a} &< 1 + \frac{Ar^2}{b} + W_0 \left(-e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{Ar^2}{a} + \frac{br}{a} &< 1 + \frac{Ar^2}{a} + W_0 \left(-e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{br}{a} - 1 &< W_0 \left(-e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right) \Leftrightarrow \\ W_0^{-1} \left(\frac{br}{a} - 1 \right) &< W_0^{-1} \left(W_0 \left(-e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right) \right) \Leftrightarrow \\ \left(\frac{br}{a} - 1 \right) e^{\frac{br}{a}-1} &< -e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{br}{a} \right) e^{\frac{br}{a}-1} > e^{-1-\frac{Ar^2}{a}}. \end{aligned}$$

Aplicando $\ln$ em ambos os lados da inequação:

$$\begin{aligned} \ln \left(\left(1 - \frac{br}{a} \right) e^{\frac{br}{a}-1} \right) &> \ln \left(e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right) \Leftrightarrow \\ \ln \left(\left(1 - \frac{br}{a} \right) e^{\frac{br}{a}-1} \right) &> \ln \left(e^{-1-\frac{Ar^2}{a}} \right) \Leftrightarrow \\ \ln \left(1 - \frac{br}{a} \right) + \frac{br}{a} &> \frac{Ar^2}{a}. \end{aligned}$$

Então, pode-se deixar a inequação em função do parâmetro A , multiplicando ambos os lados da inequação por $\frac{a}{r^2}$, então:

$$A > \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r} \quad (27)$$

Assim, a equação (27) é uma condição, em função do parâmetro A , para que quando $AE(t)$ for crescente no *Regime 1*, ou seja, $br < a$, o mínimo no *Regime 1* seja menor que o mínimo no *Regime 2*. Portanto, é possível listar as seguintes situações de ponto de vida econômica:

- $A < \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) > AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$;
- $A > \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) < AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$;
- $A = \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, se, e somente se, $AE(0) = AE\left(\frac{T(c)}{r}\right)$.

Assim, fica definida e demonstrada todo o arcabouço teórico do uso de funções contínuas para modelagem de problemas de substituição de equipamentos. Os autores partiram dos modelos tradicionais discretos utilizados em uma vasta literatura e os transformaram em funções contínuas. Estas funções passam a ser do tipo não diferenciável no sentido clássico. Dessa forma, foi conduzida uma análise não suave das funções formuladas, a fim de obter um método quantitativo com mais rigor dos conceitos de vida econômica e reposição de ativos para a tomada de decisão em problemas de substituição.

4. Aplicação

Consideram-se para aplicação um exemplo de um ativo com os seguintes valores de revenda e manutenção, ambos em função do tempo, conforme a Tabela 1 abaixo.

Ano	Manutenção	Revenda
0	R\$ 0,00	R\$ 75.000,00
1	R\$ 3.100,00	R\$ 52.000,00
2	R\$ 6.200,00	R\$ 29.000,00
3	R\$ 9.300,00	R\$ 6.000,00
4	R\$ 12.400,00	R\$ -
5	R\$ 15.500,00	R\$ -
6	R\$ 18.600,00	R\$ -
7	R\$ 21.700,00	R\$ -
8	R\$ 24.800,00	R\$ -
9	R\$ 27.900,00	R\$ -

Tabela 1 – Valores de Manutenção e Revenda para um Ativo Físico

Pela Tabela 1, tem-se o custo de aquisição (A) igual à 75000, a taxa de desvalorização (b) à 23000, o coeficiente da função de custo de manutenção (a) (por regressão linear simples) à 3100. Além disso, considera-se como dado pelo problema a taxa de desconto (r) de 10%.

Dessa maneira, como $a > br$, então $AE(t)$ é crescente no *Regime 1*. Além disso, como

$\frac{bAr^2}{b\left(e^{-r\frac{A}{b}} - 1\right) + Ar} > a$, há ponto crítico no *Regime 2*. Mais ainda, dado que $A < \ln\left(1 - \frac{br}{a}\right)^{-\frac{a}{r^2}} - \frac{b}{r}$, o mínimo global da função está no *Regime 2*. Na sequência, aplicando os valores

encontrados de a, b, r e A , é possível determinar que, por meio da equação (24) $t = \frac{T(c)}{r} = \frac{W_0(-e^{-c-1})+c+1}{r}$, a vida econômica ocorre no ano oito com valor de R\$ 25.644,65. Na Figura 11 é possível visualizar o comportamento da função $AE(t)$ para este ativo.

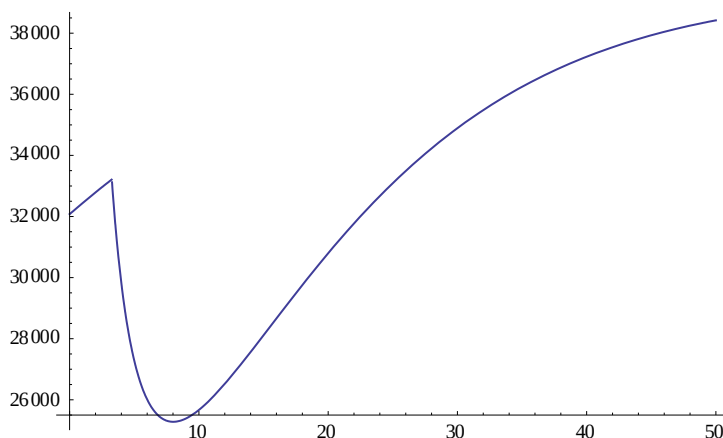


Figura 11 – Comportamento de $AE(t)$ para aplicação do artigo

Na Figura 11 é possível ver que nos primeiros anos a curva de custo de propriedade do ativo é crescente. Depois, a partir do ano quatro, a curva fica decrescente, atingindo um mínimo; isto é, a vida econômica, no ano oito, cujo valor é de R\$ 25.644,65. Após este ano, o custo de propriedade volta a crescer.

5. Conclusões

Os problemas de substituição de equipamentos são clássicos na engenharia de produção e na engenharia econômica. Neste artigo, foram construídas funções contínuas para determinação da vida econômica de ativos físicos, a partir dos conceitos de indicadores de fluxo de caixa. Com os resultados, torna-se possível chegar facilmente ao ponto de mínimo na curva de custo equivalente de propriedade, ou seja, o de vida econômica do ativo. Assim, por meio de funções contínuas e análise não suave desenvolvida ao longo do artigo, é necessário apenas ter os valores do ativo de (1) o custo de aquisição, (2) taxa de desvalorização, (3) coeficiente de crescimento dos custos de manutenção e (4) taxa mínima de atratividade. Dessa forma é possível calcular o ponto de vida econômica, o qual orienta para reposição de ativos.

Referências

- ABENSUR, E. O. *Replacement of capital goods: an optimization model from the perspective of Production Engineering*. Gestão & Produção, 2015.
- ADKINS, R.; PAXSON, D. *Deterministic models for premature and postponed replacement*. Omega, v. 41, n. 6, p. 1008-1019, 2013.
- ALCHIAN, A. *Economic replacement policy. An abbreviated version of r-224*. RAND CORP SANTA MONICA CALIF, 1958.
- BROWN, R.; YANUCK, R. R. *Introduction to Life Cycle Costing*. The Fairmont Press, Inc. e Prentice-Hall, Inc. EUA, 1985.
- BUSER, S. A. *Laplace Transforms as Present Value Rules: A Note*. The Journal of Finance, Vol. 41, No. 1 (Mar., 1986), pp. 243-247
- CESCA, I. G. *Custo de ciclo de vida de equipamentos industriais com programação dinâmica*. Sinergia (IFSP. Online), v. 18, p. 30-34, 2017.

CESCA, I. G. *Previsão de custo de ciclo de vida e gestão econômica de ativos físicos de indústrias do setor energético*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2012.

CORLESS, R. M.; GONNET G. H.; HARE D. E. G.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. *On the Lambert W Function*, Adv. Comput. Math., no. 4, 329-359, 1996.

DHILLON, B. S. *Life Cycle Costing for Engineers*. CRC Press, 2010.

ZAMBUJAL-OLIVEIRA, J.; DUQUE, J. Operational asset replacement strategy: A real options approach. European Journal of Operational Research, v. 210, n. 2, p. 318-325, 2011.

HARTMAN, J. C. *Multiple asset replacement analysis under variable utilization and stochastic demand*. European Journal of Operational Research, v. 159, n. 1, p. 145-165, 2004.

LONGO, M.; ZANOBETTI, D. *Criteria for asset replacement studies*. Engineering Costs and Production Economics, v. 17, n. 1, p. 271-275, 1989.

MARQUES, G. M. *Transformação e Substituição de Equipamentos Utilizando Equações Diferenciais e Programação Dinâmica*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, MG, 2003.

PARK, C. S. *Contemporary engineering economics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

ROSS, S.; WESTERFIELD, R. W.; JAFFE, J. F. *Administração Financeira*. Traduzido de *Corporate finance*, 2nd Ed. Editora Atlas, 2002.

SULLIVAN, W. G. MCDONALD, T. N.; VAN AKEN, E. M. *Equipment replacement decisions and lean manufacturing*. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, v. 18, n. 3, p. 255-265, 2002.

WADDELL, R. *A Model for Equipment Replacement Decisions and Policies*. Interfaces, Vol. 13, No. 4 (Aug., 1983), pp. 1 - 7.

YE, M. *Optimal replacement policy with stochastic maintenance and operation costs*. European Journal of Operational Research, v. 44, n. 1, p. 84-94, 1990.