

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO-ROTEAMENTO EM DOIS NÍVEIS COM JANELAS DE TEMPO E MÚLTIPLOS ENTREGADORES

Juan Sebastián Poveda Gulfo (Universidade Federal de São Carlos) poveda@ufscar.br

Vitória Pureza (Universidade Federal de São Carlos) vpureza@dep.ufscar.br

Resumo:

O Problema de Localização-Roteamento em Dois Níveis com Janelas de Tempo e Múltiplos Entregadores (*Two-echelon Location-routing Problem with Time Windows and Multiple Deliverymen* - 2E-LRPTWMD) é um problema logístico que surge em atividades reais de distribuição de bens em que os veículos de entrega enfrentam dificuldades de trânsito e estacionamento, por exemplo, em áreas centrais de cidades populosas. Devido a essas dificuldades, a distribuição é realizada em dois níveis; cada veículo se desloca entre agrupamentos (*clusters*) de clientes próximos entre si, e em cada *cluster*, a entrega dos produtos é realizada pelo motorista e possivelmente alguns ajudantes que visitam os clientes a pé a partir do local de parada do veículo. O 2E-LRPTWMD visa obter a localização, o roteamento e a programação de pontos de parada dos veículos, o número de entregadores em cada veículo, assim como a designação, o roteamento e a programação do subconjunto de clientes servidos pelos entregadores de cada veículo a partir dos pontos de parada selecionados. Estas decisões devem ser tomadas de maneira a minimizar o custo total para o atendimento de todas as demandas. Neste trabalho é proposto um modelo de programação matemática para a representação do problema e apresentadas as soluções do modelo com instâncias de pequeno porte.

Palavras chave: Localização, Roteamento Multi-nível, Janelas de Tempo, Múltiplos Entregadores, Programação Matemática.

Mathematical Modeling for the Two-echelon Location-routing Problem with Time Windows and Multiple Deliverymen

Abstract

The Two-echelon Location-Routing Problem with Time Windows and Multiple Deliverymen (2E - LRPTWMD) is a real-life goods distribution problem that arises in regions where the delivery vehicles face traffic and parking difficulties, for example, in central regions of populous cities. Because of these difficulties, the distribution is carried out on two levels; each vehicle travels between groups (clusters) of customers close to each other, and for each cluster, the delivery of the products is carried out by the driver and possibly some deliverymen who visit the customers on foot from the vehicle stop location. The 2E-LRPTWMD aims to obtain the location, routing and scheduling of vehicle parking spots, the number of deliverymen in each vehicle, as well as the assignment, routing and scheduling of customer subsets served by the deliverymen in each vehicle from the selected parking spots. These decisions must be taken in order to minimize the total cost to serve all demands. This work proposes a mathematical model to describe the problem and presents the model's solutions for small instances.

Key-words: Location, Multilevel Routing, Time Windows, Multiple Deliverymen, Mathematical Programming.

1. Introdução

Problemas de roteamento de veículos são considerados dentre os mais desafiadores em função de sua complexidade computacional, classificada como NP-Hard (LENSTRA; RINNOOY-KAN, 1981) e amplamente estudados devido à sua importância teórica e aplicações práticas no campo da logística (DESROCHERS et al., 1988). O caso seminal foi reportado em Dantzig e Ramser (1959) é denominado Problema de Despacho de Caminhões (*Truck Dispatching Problem*). Nesse artigo, os autores discutem uma aplicação real de entrega de gasolina em postos de combustíveis, para a qual se deseja determinar o sequenciamento de entregas não fracionadas aos postos, utilizando para isso uma frota homogênea de caminhões que parte e retorna a um depósito central, de forma a minimizar a distância total percorrida pela frota. Atualmente o problema é conhecido como o Problema de Roteamento de Veículos clássico (*Vehicle Routing Problem – VRP*).

Uma variante recente do VRP é o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo e Múltiplos Entregadores (*Vehicle Routing Problem with Time Windows and Multiple Deliverymen – VRPTWMD*) (PUREZA; MORABITO; REIMANN, 2012). O uso de múltiplos entregadores é uma prática de empresas para redução do tempo de serviço nos clusters, o que permite o aumento do número de clientes atendidos durante a jornada de trabalho diária. Neste problema, veículos de entrega (em geral, caminhões) devem entregar grandes volumes de produtos a clientes localizados em áreas centrais de cidades populosas, para os quais o serviço deve ser iniciado dentro de uma janela (ou intervalo) de tempo. Devido às dificuldades de trânsito e de estacionamento, a distribuição é realizada em dois níveis; cada veículo se desloca entre agrupamentos (clusters) de clientes próximos entre si, e em cada cluster, a entrega dos produtos é realizada pelo motorista e possivelmente alguns ajudantes que visitam os clientes a pé a partir do local de parada do veículo. O uso de múltiplos entregadores é uma prática de empresas para redução do tempo de serviço nos clusters, o que permite o aumento do número de clientes atendidos durante a jornada de trabalho diária. Na grande maioria dos artigos nesse tema, pressupõe-se que os pontos de parada e o subconjunto de clientes em cada cluster tenham sido decididos previamente, estando o roteamento limitado ao primeiro nível.

No presente artigo, as decisões do segundo nível são incorporadas ao VRPTWMD, resultando na extensão aqui denominada Problema de Localização-Roteamento em Dois Níveis com Janelas de Tempo e Múltiplos Entregadores (*Two-echelon Location-routing Problem with Time Windows and Multiple Deliverymen – 2E-LRPTWMD*). É proposto um modelo de programação matemática para a situação em que o segundo nível do roteamento consiste de uma única rota por cluster, e são reportados resultados de experimentos com instâncias de pequeno porte.

2. Revisão bibliográfica

Pureza, Morabito e Reimann (2012) introduzem o VRPTWMD para o qual se considera a possibilidade de designar mais de um entregador a cada veículo, permitindo assim reduções nos tempos de serviço (BRAEKERS; RAMAEKERS; VAN NIEUWENHUYSE, 2015). Os autores propõem metaheurísticas baseadas em Otimização por Colônia de Formigas (*Ant Colony Optimization – ACO*) e Busca Tabu para resolução do problema. Sob o mesmo pressuposto de pontos de paradas e clusters de clientes previamente definidos, outros trabalhos propõem algoritmos baseados em ACO e GRASP (SENARCLENS DE GRANCY; REIMANN, 2016), métodos exatos utilizando um algoritmo *branch-price-and-cut* (MUNARI; MORABITO, 2016) e métodos híbridos que combinam um método exato e metaheurísticas (ÁLVAREZ; MUNARI, 2016).

Souza Neto e Pureza (2016) apresentam uma aplicação real do problema com múltiplas viagens por veículo e que inclui a formação dos clusters de clientes por inspeção visual. Os autores propõem um algoritmo GRASP e um método híbrido para sua resolução. Senarclens De Grancy e Reimann (2015) e Senarclens De Grancy (2015), por sua vez, decompõem o problema em dois estágios; no primeiro estágio é realizada a localização e formação dos clusters e no segundo estágio é feito o roteamento nos dois níveis para os veículos e entregadores. Vale a pena ressaltar que esses trabalhos consideram uma política de entrega diferente à política de entrega adotada no presente trabalho.

3. Descrição do problema

O Problema de Localização-Roteamento em Dois Níveis com Janelas de Tempo e Múltiplos Entregadores (2E-LRPTWMD) consiste em definir rotas primárias para uma frota homogênea de tamanho ilimitado que parte e retorna a um depósito central, assim como rotas secundárias a serem executadas a pé pela tripulação dos veículos, com vistas à entrega de produtos a clientes localizados em centros urbanos. As rotas primárias visitam um subconjunto de possíveis pontos de parada de veículos enquanto as rotas secundárias visitam clientes, partindo e retornando aos pontos de parada presentes nas rotas primárias. Ou seja, cada ponto visitado em uma dada rota primária representa o depósito ou um ponto de parada do veículo, e cada ponto visitado em uma dada rota secundária representa um ponto de parada do veículo ou um cliente. No máximo uma única rota secundária emerge de cada ponto de parada para servir um único cliente ou um cluster de clientes próximos entre si.

A Figura 1 ilustra uma solução com duas rotas (veículos); o veículo da rota verde visita inicialmente um cluster composto de quatro clientes, atendidos a pé pela tripulação na rota secundária 7-6-4-5 (os números representam a identificação dos clientes). Uma vez servido o cluster, o veículo visita o cluster composto por um único cliente (2), retornando ao depósito. O veículo da rota laranja, por sua vez, visita apenas um cluster composto de três clientes, atendidos na rota secundária 1-8-3.

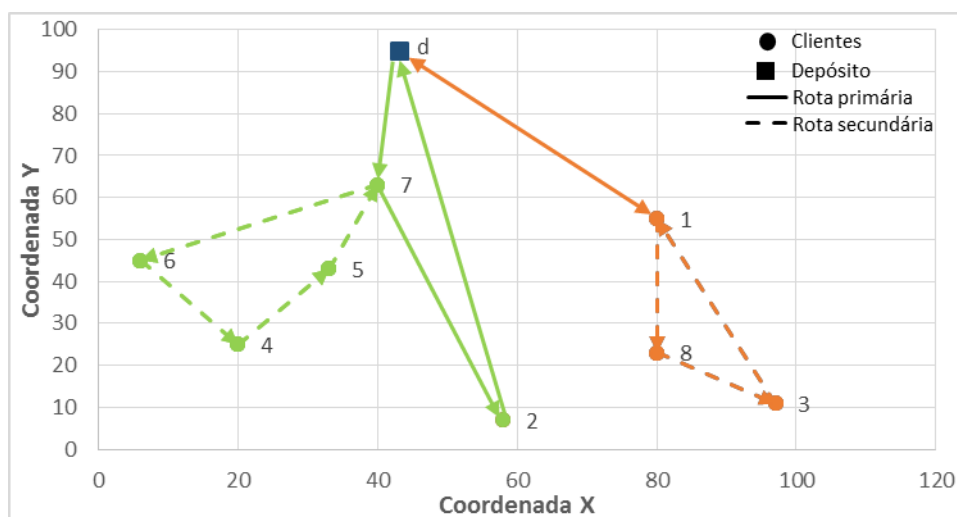


Figura 1 – Exemplo de solução para o 2E-LRPTWMD.

Os pontos elegíveis para parada dos veículos consistem em um subconjunto do conjunto de pontos cujas localizações são idênticas às dos clientes, ou seja, assume-se que os locais de estacionamento sejam sempre em frente a algum cliente. No exemplo da Figura 1, o veículos

das rotas verde e laranja estacionam em frente aos clientes 7, 2 (rota verde) e 1 (rota laranja), respectivamente. Assim sendo, o subconjunto de paradas para os veículos compreende os pontos em que o estacionamento do veículo (em frente ao cliente) é viável. Caso o estacionamento em frente a um dado cliente não seja permitido ou inviável, diz-se que tal ponto de parada está indisponível e o cliente a ele associado precisa ser atendido a partir de outro ponto de parada. Admite-se que a distância entre quaisquer dois pontos nas rotas primárias seja fornecida pelo usuário e considere a topografia da malha viária, enquanto a distância entre quaisquer dois pontos nas rotas secundárias é euclidiana. Veículos e tripulação têm velocidades médias distintas de deslocamento.

Em cada rota primária, a carga total transportada não deve exceder a capacidade do veículo. O número de entregadores disponíveis é ilimitado, porém o tamanho da tripulação (motorista e ajudantes) de cada veículo está restrita à capacidade da cabine. Em cada rota secundária, a demanda total do cluster em questão não deve exceder a capacidade de transporte da tripulação, e assim como empregado em Souza Neto e Pureza (2016), a distância radial entre o ponto de parada e cada cliente do cluster não deve exceder uma distância máxima. A duração de cada rota primária não deve exceder a jornada de trabalho dos entregadores, e janelas de tempo para início do serviço podem incorrer em um ou mais clientes.

Deseja-se obter os pontos de parada e clusters de clientes associados, o roteamento/programação das visitas, e os tamanhos de tripulação em cada veículo utilizado, de maneira que todos os clientes sejam atendidos, e que a solução resultante otimize os seguintes o custo total, composto por quatro parcelas que priorizam: (1) minimização do número de veículos utilizados; (2) minimização do número de pontos de parada visitados, (3) minimização da tempo total dispendido na realização das rotas primárias; e (4) minimização do número total de entregadores utilizados. Em particular, o terceiro objetivo endereça as dificuldades de tráfego e estacionamento presentes em regiões centrais de cidades, estimulando o deslocamento dos entregadores em detrimento ao deslocamento dos veículos.

4. Modelagem do problema

Seja $D = \{0\}$, o conjunto unitário correspondente ao depósito central, $C = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de clientes a serem visitados, $S = \{n + 1, n + 2, \dots\}$ conjunto de pontos de paradas elegíveis e correspondentes a uma cópia do conjunto C excluídas as cópias em que a parada de veículos não é possível, e $V = D \cup S \cup C$. Seja também A_1 o conjunto de arcos direcionados entre cada dois nós $i, j \in D \cup S$ e A_2 o conjunto de arcos direcionados entre cada dois nós $i, j \in S \cup C$. O problema pode ser representado pelos grafos conexos $G_1 = \{D \cup S, A_1\}$ e $G_2 = \{S \cup C, A_2\}$. Ou seja, G_1 e G_2 se conectam entre si por meio dos nós do conjunto de paradas S . O conjunto A_1 corresponde aos arcos que podem ser percorridos por veículos em rotas primárias (conectando o depósito e pontos de parada) e o conjunto A_2 corresponde aos arcos que podem ser percorridos por entregadores em rotas secundárias (conectando pontos de parada e clientes). Para cada arco $(i, j) \in A_1$ há uma distância associada ca_{ij} e correspondente ao comprimento do caminho mais curto entre i e j , considerando a malha viária em questão. O comprimento do arco $(i, j) \in A_2$ (denominado cb_{ij}) corresponde, por sua vez, à distância euclidiana entre i e j . Os veículos percorrem exclusivamente os arcos $(i, j) \in A_1$ com velocidade v_1 e os entregadores percorrem exclusivamente os arcos $(i, j) \in A_2$ com velocidade v_2 .

Para cada nó $i \in C$ há uma demanda associada Q_i pelo produto e tempos de serviço ts_{il} em que l é o número de entregadores empregados (modo l). Por simplicidade, considera-se que tempos de serviço com mais de um entregador são obtidos dividindo-se o tempo com um

entregador pelo número de entregadores. Adicionalmente, associa-se uma janela de tempo $[a_i, b_i]$ a cada nó $i \in V$; se $i = D$, os limites das janelas são iguais aos instantes de abertura e fechamento do depósito, enquanto para $i \in C$, os limites indicam o intervalo de tempo em que o serviço em i deve ser necessariamente iniciado.

Seja a seguinte notação:

Variáveis binárias

x_{ijl}	$\begin{cases} 1 \text{ se o veículo percorre o arco } i - j \text{ em uma rota primária no modo } l \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$
xs_{ijkl}	$\begin{cases} 1 \text{ se a tripulação percorre o arco } i - j \text{ na rota secundária que se inicia no ponto de parada } k \text{ no modo } l \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$
H_{ik}	$\begin{cases} 1 \text{ se o cliente } i \text{ é designado ao cluster servido a partir do ponto de parada } k \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$

Variáveis contínuas

T_{il}	Instante em que o veículo chega ao nó i no modo l (exceto para o depósito);
TF_{kl}	Instante em que a tripulação cujo veículo visita o ponto de parada k em modo l retorna a k após a finalização da rota secundária;
TSx_{kl}	Tempo de serviço com l entregadores no cluster servido a partir do ponto de parada k ;
Y_{il}	Carga no veículo ao partir do ponto de parada i (rota primária) no modo l ;
QA_i	Demanda total do cluster servido a partir do ponto de parada j ;

Parâmetros

ca_{ij}	Distância percorrida entre i e j , $(i, j) \in A_1$, por veículos da frota ;
cb_{ij}	Distância percorrida entre i e j , $(i, j) \in A_2$, por uma equipe de entregadores ;
C_1	Custo fixo de cada veículo da frota ;
C_2	Custo unitário de tempo de deslocamento de veículos da frota;
C_3	Custo unitário de parada de veículos da frota;
C_4	Custo de alocação de um entregador;
v_1	Velocidade de deslocamento de veículos da frota;
v_2	Velocidade de deslocamento de uma equipe de entregadores;
$tv1_{ij}$	Tempo de viagem entre os nós i e j com veículos da frota $\left(\frac{Ca_{ij}}{v_1}\right)$;
$tv2_{ij}$	Tempo de viagem entre os nós i e j com uma equipe de entregadores $\left(\frac{Cb_{ij}}{v_2}\right)$;
Q_i	Demanda de $i \in C$;
QD_l	Capacidade de carga dos entregadores no modo l ;
QT	Capacidade de carga dos veículos
TS_{il}	Tempo de serviço de $i \in C$ no modo l ;
a_i	Instante de abertura da janela de tempo em j ;
b_i	Instante de encerramento da janela de tempo em j ;
$maxdist$	Distância radial máxima entre um ponto de parada e um cliente do cluster servido pelo ponto de parada;
M_{ikl}^1	$\begin{cases} b_i + TS_{il} + tv1_{ij} - a_j & \text{se } b_i + TS_{il} + tv1_{ij} - a_j \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$$M_{ikl}^2 \begin{cases} b_i + TS_{il} + tv2_{ij} - a_j & \text{se } b_i + TS_{il} + tv2_{ij} - a_j \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O problema é formulado como um modelo de programação inteira mista, conforme descrito a seguir. Considera-se também que algumas variáveis são previamente fixadas. Por exemplo, fixa-se $x_{ijl} = 0$ se $i = j$ ou $xs_{ijkl} = 0$ se $k \notin S$, dentre outras condições.

$$\begin{aligned} \text{Min } f = & C_1 \sum_{j \in S} \sum_{l \in L} x_{0jl} + C_2 \sum_{i \in DUS} \sum_{\substack{j \in DUS \\ j \neq i}} \sum_{l \in L} C a_{ij} \frac{x_{ijl}}{v1} + C_3 \sum_{i \in DUS} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} \sum_{l \in L} x_{ijl} \\ & + C_4 \sum_{j \in S} (1x_{0j1} + 2x_{0j2} + 3x_{0j3}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sujeito

a:

$$\sum_{\substack{i \in DUS \\ i \neq j}} \sum_{l \in L} x_{ijl} \leq 1 \quad \forall j \in S \quad (4.2)$$

$$\sum_{\substack{j \in DUS \\ j \neq i}} \sum_{l \in L} x_{ijl} \leq 1 \quad \forall i \in S \quad (4.3)$$

$$\sum_{\substack{j \in DUS \\ j \neq i}} x_{jil} = \sum_{\substack{j \in DUS \\ j \neq i}} x_{ijl} \quad \forall i \in S, \forall l \in L \quad (4.4)$$

$$xs_{k jkl} \leq \sum_{\substack{i \in DUS \\ i \neq k}} x_{ikl} \quad \forall k \in S, \forall j \in C, \forall l \in L \quad (4.5)$$

$$\sum_{j \in C} xs_{k jkl} \geq \sum_{\substack{i \in DUS \\ i \neq k}} x_{ikl} \quad \forall k \in S, \forall l \in L \quad (4.6)$$

$$\sum_{\substack{i \in SUC \\ i \neq j}} \sum_{k \in S} \sum_{l \in L} xs_{ijkl} = 1 \quad \forall j \in C \quad (4.7)$$

$$\sum_{\substack{j \in SUC \\ j \neq i}} \sum_{k \in S} \sum_{l \in L} xs_{ijkl} = 1 \quad \forall i \in C \quad (4.8)$$

$$\sum_{j \in C} xs_{k jkl} = \sum_{j \in C} xs_{j kkl} \quad \forall k \in S, \forall l \in L \quad (4.9)$$

$$\sum_{\substack{j \in C \\ \text{or } j=k}} xs_{j ikl} = \sum_{\substack{j \in C \\ \text{or } j=k}} xs_{i jkl} \quad \forall i \in C, \forall k \in S, \forall l \in L \quad (4.10)$$

$$\sum_{j \in V} \sum_{l \in L} xs_{k jkl} \leq 1 \quad \forall i \in S \quad (4.11)$$

$$\sum_{j \in S} H_{ij} = 1 \quad \forall i \in C \quad (4.12)$$

$$n \sum_{\substack{i \in D \cup S \\ i \neq j}} \sum_{l \in L} x_{ijl} \geq \sum_{i \in C} H_{ij} \quad \forall j \in S \quad (4.13)$$

$$\sum_{\substack{i \in D \cup S \\ i \neq j}} \sum_{l \in L} x_{ijl} \leq \sum_{i \in C} H_{ij} \quad \forall j \in S \quad (4.14)$$

$$\sum_{j \in C \cup \{k\}} \sum_{l \in L} x_{sjkl} = H_{ik} \quad \forall i \in C, \forall k \in S \quad (4.15)$$

$$\sum_{j \in C \cup \{k\}} \sum_{l \in L} x_{sijkl} = H_{ik} \quad \forall i \in C, \forall k \in S \quad (4.16)$$

$$QA_k = \sum_{i \in C} Q_i H_{ik} \quad \forall k \in S \quad (4.17)$$

$$QA_k \leq \sum_{i \in C} \sum_{l \in L} QD_l x_{ikl} \quad \forall k \in S \quad (4.18)$$

$$Cb_{ik} H_{ik} \leq \max dist \quad \forall i \in C, \forall k \in S \quad (4.19)$$

$$T_{jl} \geq T_{il} + TSx_{il} + tv1_{ij} x_{ijl} - M_{ijl}^1 (1 - x_{ijl}) \quad \forall i \in S, \forall j \in D \cup S, j \neq i, \forall l \in L \quad (4.20)$$

$$T_{jl} \geq T_{kl} + tv2_{kjl} x_{skjkl} - M_{kjl}^2 (1 - x_{skjkl}) \quad \forall j \in C, \forall k \in S, \forall l \in L \quad (4.21)$$

$$T_{jl} \geq T_{il} + (TS_{ij} + tv2_{ij} x_{sijkl}) - M_{kjl}^2 (1 - x_{sijkl}) \quad \forall i \in C, \forall j \in C, j \neq i, \quad (4.22)$$

$$\forall k \in S, \forall l \in L$$

$$TF_{kl} \geq T_{il} + (TS_{il} + tv2_{ik}) x_{sikkkl} - M_{ikl}^2 (1 - x_{sikkkl}) \quad \forall i \in C, \forall k \in S, \forall l \in L \quad (4.23)$$

$$TS_{kl} = TF_{kl} - T_{kl} \quad \forall k \in S, \forall l \in L \quad (4.24)$$

$$T_{jl} \geq a_j \sum_{i \in D \cup S} x_{ijl} \quad \forall j \in S, \forall l \in L \quad (4.25)$$

$$T_{jl} \leq b_j \sum_{i \in D \cup S} x_{ijl} \quad \forall j \in S, \forall l \in L \quad (4.26)$$

$$T_{jl} \geq a_j \sum_{i \in S \cup C} \sum_{k \in V} x_{sijkl} \quad \forall j \in C, \forall l \in L \quad (4.27)$$

$$T_{jl} \leq b_j \sum_{i \in S \cup C} \sum_{k \in V} x_{sijkl} \quad \forall j \in C, \forall l \in L \quad (4.28)$$

$$Y_{kl} \leq Y_{il} - \sum_{i \in C} Q_i H_{ik} + QT(1 - x_{ikl}) \quad \forall i \in D \cup S, \forall k \in S, i \neq k, \forall l \in L \quad (4.29)$$

$$T_{0l} \leq b_0 \quad \forall l \in L \quad (4.30)$$

$$T_{jl}, TF_{kl}, TSx_{il}, Y_{il}, QA_i \geq 0 \quad \forall i, j \in D \cup S, \forall k \in S, i \neq j, i \neq k, \forall l \in L \quad (4.31)$$

$$x_{ijl}, x_{sijkl}, H_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in D \cup S, \forall k \in S, i \neq j, i \neq k, \forall l \in L \quad (4.32)$$

A função objetivo do problema (4.1) é composta por quatro parcelas de custo, as quais devem ser minimizadas. A primeira parcela corresponde ao custo de alocação de veículos à operação; a segunda parcela é o tempo total de rota dos veículos utilizados; a terceira parcela corresponde a um custo fictício que traduz a inconveniência de paradas dos veículos, estimulando o agrupamento de clientes e, por fim, a quarta parcela representa o custo de alocação de entregadores aos veículos utilizados.

As restrições (4.2)-(4.3) garantem que cada ponto de parada deve ser visitado no máximo uma vez. As restrições (4.4) impõem a conservação de fluxo, prescrevendo que o mesmo veículo que chega a um ponto de parada em um modo l , parte desse ponto no mesmo modo l . As restrições (4.5) garantem que se um ponto de parada k não é visitado em uma rota primária, não pode existir uma rota secundária se originando dele. As restrições (4.6) indicam que se um ponto de parada k for selecionado em uma rota primária pelo menos uma rota secundária se origina dele. As restrições (4.7)-(4.8) impõem que cada cliente deve ser visitado exatamente uma vez em uma rota secundária. As restrições (4.9) impõem a conservação de fluxo nas rotas secundárias, assegurando que o mesmo número de rotas secundárias que se originam de um ponto de parada k em um modo l deve retornar a k no mesmo modo l .

As restrições (4.10) impõem que se chega a um cliente i em uma rota secundária em um modo l deve-se partir de j no mesmo modo l . As restrições (4.11) prescrevem que no máximo uma rota secundária se origina de cada ponto de parada. As restrições (4.12) impõem que cada cliente seja designado a um único ponto de parada (cluster). As restrições (4.13) forçam que se pelo menos um cliente for designado a um ponto de parada j então há um arco em uma rota primária que visita j . As restrições (4.14) impõem que se nenhum cliente for designado a um ponto de parada k , este último não é visitado em uma rota primária. As restrições (4.15)-(4.16) indicam que se um cliente i tiver sido designado a um ponto de parada k , há um arco chegando e partindo de i em uma rota secundária que se origina em k .

As restrições (4.17) calculam a demanda acumulada de cada cluster de clientes servidos a partir do ponto de parada k como igual à soma das demandas individuais desses clientes. As restrições (4.18) impõem que a demanda acumulada de cada cluster não exceda a capacidade de carga dos entregadores em uma única rota secundária. As restrições (4.19) limitam a distância radial entre cada cliente de um cluster e o ponto de parada associado.

As restrições (4.20) calculam os instantes de chegada aos nós das rotas primárias, considerando que o tempo de serviço no cluster de clientes servidos a partir do ponto de parada k no modo l (TSx_{kl}) é uma variável que depende de l e do tempo dispendido na rota secundária que se inicia em k . A programação dos l entregadores em cada rota secundária é feita da seguinte forma: as restrições (4.21) computam o instante de chegada ao primeiro cliente visitado, as restrições (4.22) computam os instantes de chegada aos demais clientes, as restrições (4.23) calculam o instante de finalização da rota secundária (TF_{kl}), ou seja, o instante de retorno ao ponto de parada associado k , e as restrições (4.24) computam TSx_{kl} como a diferença entre TF_{kl} e o instante de chegada a k na rota primária T_{kl} . As restrições (4.25)-(4.26) ativam as janelas de tempo dos pontos de parada nas rotas primárias, enquanto as restrições (4.27)-(4.28) ativam as janelas de tempo dos clientes nas rotas secundárias. As restrições (4.29) computam a carga do veículo após a visita a cada ponto de parada nas rotas primárias e as restrições (4.30) fornecem a duração máxima de cada rota primária. Por fim, as restrições (4.31)-(4.32) impõem os domínios das variáveis de decisão.

5. Resultados computacionais

Com a finalidade de validar o modelo para o 2E-LRPTWMD, proposto na seção anterior, foram executados testes computacionais com 2 instâncias de pequeno porte (*toys*). O modelo foi implementado na linguagem de modelagem algébrica GAMS e resolvido com o *solver* CPLEX 12.5. As opções do *solver* que diferem da configuração padrão são $fpheur = 2$, $heurfreq = 100$, $lbheur = 1$ e $threads = 4$, e $tilim = 18.000$ segundos (5 horas). Todos os testes foram realizados em um computador Dell Optiplex 9010, processador principal Intel Core i7 com 3,4 GHz, 16 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 7 Professional de 64 bits. Os custos utilizados na função objetivo são $C_1 = 1000$, $C_2 = 100$, $C_3 = 500$ e $C_4 = 1,1$.

As 3 instâncias (*toys*) de 12 clientes foram produzidas com base em abordagens de geração da literatura, e modificadas em concordância com a estrutura do 2E-LRPTWMD. Especificamente, as coordenadas do depósito e dos clientes foram geradas entre 0 e 100 unidades de distância segundo a abordagem proposta por Uchoa et al. (2014) para distribuição espacial clusterizada, as demandas seguem uma distribuição uniforme entre os valores 10 e 40 unidades, as janelas de tempo (quando existentes) foram geradas com base na abordagem proposta por Solomon (1987), e os tempos de serviço para cada cliente foram calculados de acordo com Pureza, Morabito e Reimann (2012).

Todas as instâncias compartilham a mesma distribuição geográfica de clientes (Tabela 1), demandas, capacidade dos veículos, e horizonte de planejamento. Para todas as instâncias, as distâncias entre nós foram calculadas de forma simétrica e seguindo a métrica euclidiana para o caso de percursos realizados por entregadores. Para percursos realizados por veículos, as distâncias são também simétricas, porém a distância é um múltiplo igual a 1 ou 3 da distância euclidiana, a fim de simular uma possível situação em uma malha viária urbana. Os dados de entrada restantes são específicos para cada *toy* e descritos a seguir.

i	X	Y	Q_i	a_i	b_i	QT
0	43	95	0	0	280	200
1	54	50	40			
2	43	7	20			
3	97	11	20			
4	7	11	20			
5	95	34	20			
6	6	19	40			
7	6	63	10			
8	80	23	20			
9	56	13	40			
10	18	63	20			
11	73	4	40			
12	59	36	30			

Tabela 1 – Dados comuns nas instâncias tratadas

Toy 1

Os dados específicos do *toy* são apresentados na Tabela 2. Nota-se que ele corresponde a um exemplo pouco restrito. Não há janelas de tempo em clientes (podem ser visitados em qualquer instante correspondente ao período de funcionamento do depósito) e todos os pontos de paradas estão disponíveis. A distância radial para agrupamento foi estabelecida em 150 unidades de distância, o que, a princípio, permite clusters com vários clientes.

i	a_i	b_i	$maxdist$
1-12	0	280	150

Tabela 2 – Dados adicionais de toy 1

A Figura 2 ilustra as rotas obtidas após 18.000 segundos de execução. As diferentes cores das linhas distinguem as rotas, com as linhas sólidas indicando o percurso do veículo e as linhas tracejadas o percurso dos entregadores. A solução utiliza 3 veículos, cada qual atendendo 1 cluster. As rotas em laranja, verde e cinza utilizam respectivamente, 3, 2 e 2 entregadores, e atendem demandas acumuladas de 140, 100 e 80, enquanto a distância total percorrida é de 68,191 unidades. Observa-se que o *solver* não provou a otimalidade da solução, sendo obtido um *gap* de 22,56%. Este resultado revela as dificuldades de convergência do método de solução quando a instância é pouco restrita, mesmo quando seu porte é pequeno.

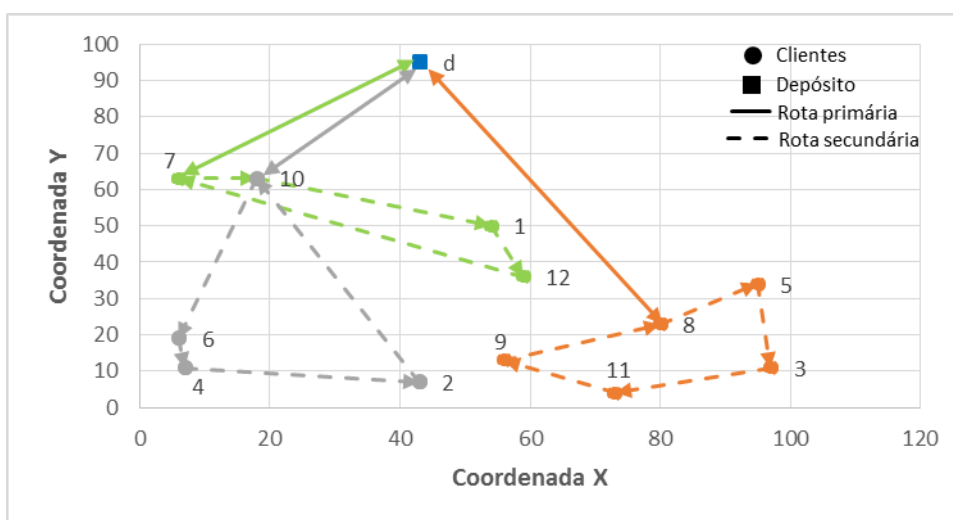


Figura 2 – Rotas de toy 1.

Toy 2

Este toy tem os mesmos dados de toy 1, porém foi adicionado um conjunto de pontos de parada indisponíveis (não é possível estacionar em frente aos clientes 2, 4 e 8) e foram incluídas janelas de tempo em quatro clientes e nos pontos de parada em frente a estes clientes (Tabela 3). Para cada ponto de parada com janela de tempo, o instante de abertura é igual ao do cliente e o instante de encerramento é igual ao do depósito.

A Figura 3 ilustra a solução obtida após 18.000 segundos de execução, a qual também utiliza 3 veículos, atendendo 1 cluster cada. As rotas em laranja, verde e cinza têm, respectivamente, 100, 120 e 100 unidades como demandas acumuladas, cada uma com 3 entregadores designados e distância total percorrida de 73,91 unidades. Nota-se que o *gap* é igual a 17,19%, o que indica que a inclusão de algumas janelas de tempo melhora um pouco a convergência do modelo.

i	a_i	b_i
1-4, 9-12	0	280
5	75	75
6	90	95
7	50	55
8	35	40
17	75	280
18	90	280
19	50	280
20	35	280

Tabela 3 – Dados adicionais de toy 2

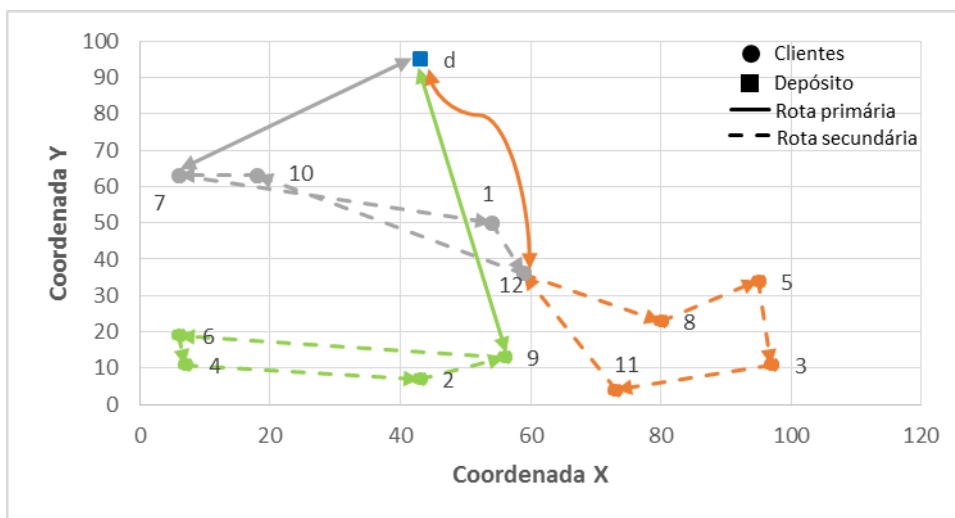


Figura 3 – Rotas de toy 2.

Toy 3

Este exemplo possui as mesmas janelas de tempo e indisponibilidade de pontos de parada de toy 2, o único dado que muda com respeito ao toy anterior é a máxima distância radial entre um cliente e o ponto de parada do cluster que é reduzida de 150 para 30.

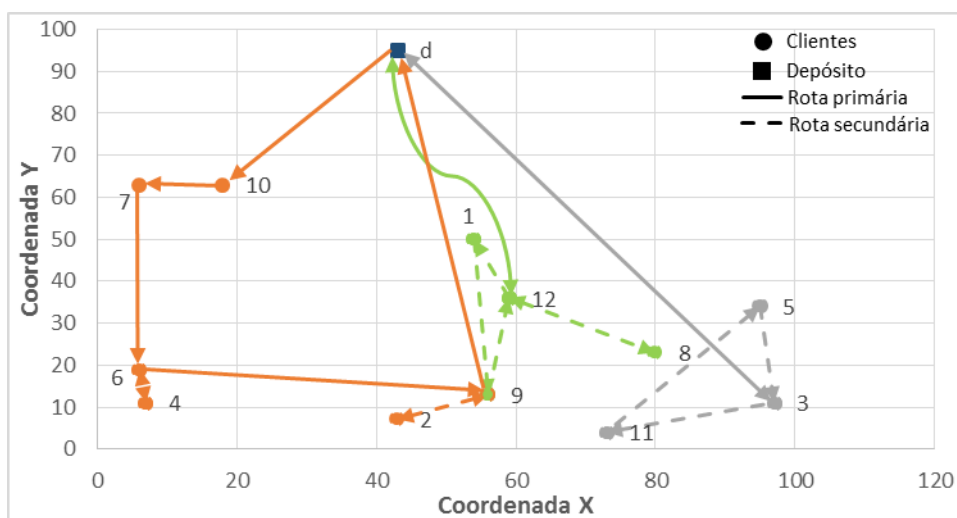


Figura 4 – Rotas de toy 3.

A solução (figura 4) utiliza 3 veículos, 9 entregadores, atende 6 clusters e percorre uma distância total de 152,938. Esta solução é ótima e foi obtida após 197 segundos, o que indica que a diminuição da máxima distância radial para inclusão de clientes em clusters pode facilitar a convergência do método de solução, pelo menos para instâncias de pequeno porte.

6. Conclusões

O 2E-LRPTWMD foi formalmente descrito e formulado por um modelo de programação inteira mista. Em seguida, foram apresentados resultados de experimentos computacionais com algumas instâncias de pequeno porte (*toys*) com o objetivo de validação do modelo. Os resultados revelam que o 2E-LRPTWMD é um problema de difícil resolução, em particular, na escassez de janelas de tempo em clientes. Nesses casos, o método exato utilizado enfrentou dificuldades de convergência, produzindo soluções com gaps de cerca de 20%, mesmo após várias horas de processamento. De forma complementar, os resultados também indicam que ao impor algumas janelas de tempo em clientes melhora a resolução de instâncias deste porte. Por outro lado, o método apresenta também uma melhoria na convergência ao diminuir a distância de agrupamento entre clientes, isso é explicado pela anulação de variáveis de agrupamento e roteamento no segundo nível.

Referências

- ÁLVAREZ, A.; MUNARI, P. *An exact algorithm for a vehicle routing problem with time windows and multiple use of vehicles*. Industrial Engineering Department, Federal University of São Carlos, São Carlos-SP, Brazil, 2016. Disponível em: <http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2016/06/5501.html>.
- BRAEKERS, K.; RAMAEKERS, K.; VAN NIEUWENHUYSE, I. *The vehicle routing problem: State of the art classification and review*. Computers and Industrial Engineering, 2015.
- DANTZIG, G. B.; RAMSER, J. H. *The Truck Dispatching Problem*. Management Science, v. 6, n. 1, p. 80–91, 1959.
- DESROCHERS, M. et al. *Vehicle routing with time windows: optimization and approximation*. Vehicle Routing: Methods and Studies, 1988.
- KUMAR, S. N.; PANNEERSELVAM, R. A. *Survey on the Vehicle Routing Problem and Its Variants*. Intelligent Information Management, v. 4, n. 3, p. 66–74, 2012.
- LENSTRA, J. K.; RINNOOY-KAN, A. H. G. *Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems*. Networks, v. 11, n. 2, p. 221–227, 1981.
- MUNARI, P.; MORABITO, R. *The vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen: exact solution approaches*. Technical Report, Production Engineering Department, Federal University of São Carlos, Rod. Washington Luís, km 235 - SP-310, São Carlos - SP - CEP: 13565-905, Brazil. January, 2016. Disponível em: <http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2016/01/5289.html>.
- PUREZA, V.; MORABITO, R.; REIMANN, M. *Vehicle routing with multiple deliverymen: Modeling and heuristic approaches for the VRPTW*. European Journal of Operational Research, v. 218, n. 3, p. 636–647, 2012.
- SENARCLENS DE GRANCY, G. *An Adaptive Metaheuristic for Vehicle Routing Problems with Time Windows and Multiple Service Workers*. Journal of Universal Computer Science, v. 21, n. 9, p. 1143–1167, 2015.
- SENARCLENS DE GRANCY, G.; REIMANN, M. *Evaluating two new heuristics for constructing customer clusters in a VRPTW with multiple service workers*. Central European Journal of Operations Research, v. 23, n. 2, p. 479–500, 2015.
- SENARCLENS DE GRANCY, G.; REIMANN, M. *Vehicle routing problems with time windows and multiple service workers: a systematic comparison between ACO and GRASP*. Central European Journal of Operations Research, v. 24, n. 1, p. 29–48, 2016.
- SOLOMON, M. M. *Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints*. Operations Research, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987.
- SOUZA NETO, J. F. DE; PUREZA, V. *Modeling and Solving a Rich Vehicle Routing Problem for the delivery of goods in urban areas*. Pesquisa Operacional. No prelo.
- TOTH, P.; VIGO, D. *The Vehicle Routing Problem*. Philadelphia: SIAM, 2002. 367 p.
- UCHOA, E. et al. *New Benchmark Instances for the Capacitated Vehicle Routing Problem*. Rio de Janeiro, RJ: Relatório de pesquisa em engenharia de produção - Universidade Federal Fluminense, 2014. Disponível em: <http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2014/10/4597.pdf>.