

Modelagem matemática do problema de fluxo de carga em Sistemas Elétricos usando a linguagem de programação AMPL

Hugo A. R. Flórez (Universidade Tecnológica Federal do Paraná) hugoflorez@utfpr.edu.br
Gloria Patrícia López S. (Universidade Tecnológica Federal do Paraná) gloriap@utfpr.edu.br

Resumo:

A modelagem matemática aplicada à resolução de problemas complexos vem se tornando uma poderosa ferramenta que auxilia na obtenção de resultados em diversas áreas de engenharia. No caso particular da engenharia elétrica, o fluxo de carga destaca-se como uma das principais ferramentas usadas nas análises dos Sistemas Elétricos de Potência. O fluxo de carga tem por finalidade determinar o ponto de operação do sistema a partir da modelagem matemática dos diferentes dispositivos que compõem o sistema elétrico e as previsões de demanda do sistema. Dentre os métodos propostos na literatura, o método de Newton-Raphson e o método de soma de correntes são os principais métodos usados nos estudos de fluxo de carga nos Sistemas de Transmissão de Energia e nos Sistemas de Distribuição de Energia, respectivamente. Devido à sua complexidade matemática e considerando a importância de resolver problemas em engenharia através da modelagem matemática, neste trabalho é resolvido o problema de fluxo de carga em SEP através do modelo matemático não-linear dos métodos de Newton e soma de correntes usando a linguagem de programação AMPL. Por fim, estes modelos são validados através de sistemas-teste referenciados na literatura especializada.

Palavras chave: Modelagem matemática, Fluxo de carga, Método de Newton-Raphson, Método de soma de correntes, AMPL.

Mathematical modeling of power system load flow using the mathematical programming modeling language AMPL

Abstract

Mathematical modeling is a powerful tool that can be applied to solving complex problems in many areas of engineering. In the case of electrical engineering, the power system load flow is one of the most important methods that have been used in power system analysis. The aim of the power flow analysis is to determine the power system operation point for specified load and generator conditions. Among the methods proposed in the literature, the Newton-Raphson method and the current summation method are the main approaches used in power system transmission and distribution analysis, respectively. Due to its mathematical complexity and considering the importance to solve engineering problems through mathematical modeling, one nonlinear model based on Newton-Raphson method and one nonlinear model based on current summation method are solved using a Mathematical Programming Language - AMPL. Finally, these mathematical models are validated through power test systems referenced in the literature.

Key-words: Mathematical modeling, Power system load flow, Newton-Raphson method, Current summation method, AMPL.

1. Introdução

O desenvolvimento de técnicas e modelos para a análise e planejamento em regime permanente tem sido uma das linhas de pesquisa mais importantes na área dos Sistemas Elétricos de Potência (SEP). Esta linha de pesquisa compreende o desenvolvimento de modelos matemáticos, e aplicação de técnicas matemáticas para resolver problemas relacionados com a operação das redes de energia (GALLEGO, 2004).

Dada sua complexidade e visando simplificar as análises dos SEP, estes podem ser divididos em três grandes áreas: Sistema de Geração de Energia Elétrica (SGEE), Sistema de Transmissão de Energia Elétrica (STEE) e Sistemas de Distribuição de Energia (SDEE). Nestas áreas existem diferentes abordagens caracterizadas pela sua complexidade matemática, tais como: Despacho econômico, localização de faltas, análise de contingências, fluxo de carga, estimação de estado, previsões de demanda, entre outros.

Dentre as principais metodologias usadas nas análises dos SEP, o fluxo de carga é uma das principais ferramentas usadas nos sistemas elétricos de potência (SEP) para avaliar o seu comportamento em regime permanente e para resolver problemas relacionados com a operação e o planejamento das redes elétricas.

O fluxo de carga tem por finalidade determinar o estado operativo da rede, também conhecido como o ponto de operação do sistema, a partir da modelagem matemática dos diferentes dispositivos que compõem o sistema elétrico e as previsões de demanda do sistema. Este ponto de operação é dado pela obtenção das variáveis de estado, geralmente, representadas como as magnitudes e os ângulos das tensões em todas as barras do sistema. Uma vez conhecidos esses valores, as demais grandezas tais como os fluxos de potência ativa e reativa nas linhas, as injeções nodais de potência ativa e reativa, assim como as perdas do sistema podem ser calculadas.

Tradicionalmente, o problema de fluxo de carga nos STEE tem sido resolvido através do método de Newton e as suas versões desacopladas (TINNEY, 1967; MONTICELLI, 1983). Por outro lado, para resolver o problema de fluxo de carga em SDEE, além do método de Newton usado nos STEE, têm sido propostos vários métodos denominados métodos de varredura (SHIRMOHAMMADI, 1988; CÉSPEDES, 1990; BARAN, 1989). Dentre estes métodos, destaca-se o método de soma de correntes, já que, diferente dos outros métodos de varredura, este método permite analisar as características desbalanceadas dos SDEE (SHIRMOHAMMADI, 1985).

Dado que o método de Newton e o método de soma de correntes são os métodos mais referenciados nas análises de fluxo de carga em STEE e em SDEE, respectivamente, e considerando a importância de resolver problemas em engenharia através da modelagem matemática, neste trabalho propõe-se resolver o problema de fluxo de carga em SEP através do desenvolvimento dos modelos matemáticos dos métodos de Newton e soma de correntes usando a linguagem de programação AMPL. Estes modelos matemáticos são validados através de sistemas-testes usados na literatura especializada.

2. Fluxo de carga em SEP

O cálculo do ponto de operação permanente de um SEP é uma condição de extrema importância nos centros de controle de energia, já que através destes resultados é possível verificar, que os geradores operem dentro dos limites operacionais especificados, que as linhas de transmissão e os transformadores não fiquem sobrecarregados, que as barras do sistema operem com valores de tensão próximos aos valores nominais, que a demanda do sistema seja atendida, entre outros aspectos (GALLEGO, 2004).

Para tanto, foi desenvolvido um procedimento matemático chamado de fluxo de carga. O fluxo de carga ou fluxo de potência tem por finalidade calcular as variáveis de estado do sistema, isto é, o módulo e o ângulo das tensões nodais. Assim, uma vez conhecidas as variáveis de estado do sistema é possível determinar os fluxos de potência ativa e reativa nas linhas de transmissão, as potências injetadas nos geradores, as perdas do sistema, entre outras grandezas. Cabe salientar a importância dos estudos de fluxo de carga nas análises dos SEP, pois, estes resultados são o ponto de início de outras análises pertencentes ao planejamento, operação e controle dos SEP.

Na literatura é possível encontrar diferentes procedimentos para realizar as análises de fluxo de carga. Nos STEE, o fluxo de carga tem sido resolvido iterativamente através dos métodos de Gauss-Seidel e de Newton-Raphson. No entanto, devido a alguns problemas de convergência do método de Gauss-Seidel, o método de Newton-Raphson tornou-se o método convencional usado para resolver o problema de fluxo de carga em STEE (GLOVER, 2004). Por outro lado nos SDEE, embora seja possível usar o método de Newton-Raphson para resolver o problema de fluxo de carga, têm sido propostos outros métodos. Estes métodos, geralmente chamados métodos de varredura, foram desenvolvidos exclusivamente para SDEE. Caracterizam-se pelo uso de procedimentos simplificados para determinar o ponto de operação do sistema sem fazer uso de matrizes de grande porte, o que representa uma vantagem quando comparado com o método de Newton-Raphson. Dentre os métodos de varredura existentes destaca-se o método de soma de correntes, uma vez que é o único método que permite analisar o comportamento desbalanceado dos SDEE.

De acordo com o descrito anteriormente pode-se afirmar que o método de Newton-Raphson e o método de soma de correntes são os principais algoritmos usados nos estudos de fluxo de carga em STEE e SDEE, respectivamente. Os principais aspectos destes métodos são descritos a seguir.

2.1 Método Newton Raphson

A formulação básica do método de Newton-Raphson é obtida a partir das seguintes equações nodais (MONTICELLI, 1983):

$$P_k = V_k \sum_{\forall m \in \Omega B} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (1)$$

$$Q_k = V_k \sum_{\forall m \in \Omega B} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (2)$$

Onde a solução do método de Newton-Raphson é dada pelos valores de V_k e θ_k , $\forall k \in \Omega B$, de tal forma que satisfaçam as equações:

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k = 0 \quad (3)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k = 0 \quad (4)$$

Sendo que para cada barra define-se $P_k^{esp} = P_k^G - P_k^D$ e $Q_k^{esp} = Q_k^G - Q_k^D$, respectivamente.

De acordo com o anterior, na formulação básica do método de Newton-Raphson definem-se quatro variáveis para cada barra de um SEP, sendo que duas variáveis são especificadas nos dados de entrada (parâmetros) e as outras duas são incógnitas a serem determinadas ao longo do processo iterativo. Segundo o anterior, nos SEP existem diferentes tipos de barras:

a) Barra de referência: Nesta barra V_k e θ_k são conhecidos e P_k e Q_k são incógnitas;

- b) Barra de carga: Nesta barra P_k e Q_k são conhecidos e V_k e θ_k são incógnitas;
 c) Barra de tensão controlada: Nesta barra P_k e V_k são conhecidos e Q_k e θ_k são incógnitas.

Conforme a classificação anterior e considerando um SEP de n barras, o fluxo de carga consiste na solução de um sistema de $2n$ equações e $2n$ incógnitas. Assim, para determinar os valores das incógnitas do problema faz-se necessário resolver os seguintes subsistemas:

- a) Subsistema 1: São determinados os valores de V_k nas barras PQ e θ_k nas barras PQ e PV ;
 b) Subsistema 2: A partir dos resultados anteriores, calcula-se P_k nas barras $V\theta$ e Q_k nas barras $V\theta$ e PV . Seguidamente, outras grandezas podem ser calculadas, tais como, os fluxos de potência nas linhas, as perdas de potência do sistema, entre outras.

Como mencionado anteriormente, para obter os valores de V_k e θ_k em todas as barras do sistema deve ser resolvido o subsistema 1. Para tal fim, o conjunto de equações não-lineares mostrado em (3) e (4) podem ser representado como $g(X) = 0$, tal que:

$$g(X) = \begin{bmatrix} g_1(X) \\ g_2(X) \\ \vdots \\ g_n(X) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Onde o vetor $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]$ representa as variáveis de estado do sistema.

Para solucionar esse sistema de equações deve-se linearizar $g(X)$ em torno do ponto $x^{(i)}$. Desta forma, expandindo $g(X)$ em séries de Taylor, obtém-se:

$$g(x^{(i)} + \Delta x^{(i)}) \approx g(x^{(i)}) + g'(x^{(i)})\Delta x^{(i)} = 0 \quad (6)$$

Onde a obtenção das variáveis de estado é dada pela expressão:

$$\Delta x^{(i)} = -\frac{g(x^{(i)})}{g'(x^{(i)})} \quad (7)$$

Segundo o anterior e de acordo com a formulação do método de Newton-Raphson é possível definir os seguintes vetores:

$$g(x^{(i)}) = \begin{bmatrix} \Delta P_k^{(i)} \\ \Delta Q_k^{(i)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\Delta x^{(i)} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_k^{(i)} \\ \Delta V_k^{(i)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Portanto, a expressão mostrada em (7) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_k^{(i)} \\ \Delta V_k^{(i)} \end{bmatrix} = [g'(x^{(i)})]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P_k^{(i)} \\ \Delta Q_k^{(i)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Onde $[g'(x^{(i)})]$ é a matriz Jacobiana do sistema definida como:

$$[g'(x^{(i)})] = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial \theta} & \frac{\partial P}{\partial V} \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} & \frac{\partial Q}{\partial V} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Os elementos desta matriz são obtidos derivando as equações (3) e (4) com respeito às variáveis de estado do sistema.

Finalmente, para atualizar os valores das variáveis de estado usa-se a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \theta_k^{(i+1)} \\ V_k^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_k^{(i)} \\ V_k^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \theta_k^{(i)} \\ \Delta V_k^{(i)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

O processo iterativo continua até satisfazer a condição de convergência. Desta forma, os passos do algoritmo de fluxo de carga de Newton-Raphson podem ser organizados da seguinte forma:

- i) **Dados de entrada:** Valores dos parâmetros do sistema. P_k^{esp} nas barras PV e PQ, Q_k^{esp} nas barras PQ, V_k^{esp} nas barras PV e Vθ, θ_k^{esp} na barra Vθ. P_k^{esp} e V_k nas barras PV;
- ii) **Início do processo iterativo:** Inicializar o contador de iterações $i = 0$;
- iii) **Inicialização das variáveis de estado:** Estimar os valores iniciais de $V_k^{(i)}$ e $\theta_k^{(i)}$, $\forall_k \in \Omega B$;
- iv) **Calcular $\Delta P_k^{(i)}$ e $\Delta Q_k^{(i)}$:** Usando (3) calcula-se $\Delta P_k^{(i)}$ nas barras PV e PQ e usando (4) calcula-se $\Delta Q_k^{(i)}$ nas barras PQ;
- v) **Critério de convergência:** Se $\max\{|\Delta P_k^{(i)}|, |\Delta Q_k^{(i)}|\} \leq tol$, então vá ao passo viii. Caso contrário, vá ao passo vi;
- vi) **Calcular $\Delta \theta_k^{(i)}$ e $\Delta V_k^{(i)}$:** Usando (10) calculam-se $\Delta \theta_k^{(i)}$ nas barras PV e PQ e $\Delta V_k^{(i)}$ nas barras PQ.
- vii) **Atualização das variáveis de estado:** Através de (12) calcular $\theta_k^{(i+1)}$ nas barras PV e PQ e $V_k^{(i+1)}$ nas barras PQ. Fazer $i = i + 1$ e ir ao passo iv;
- viii) **Apresentação dos resultados.** O ponto de operação do sistema é dado pelos valores de $V_k^{(i)}$ e $\theta_k^{(i)}$, $\forall_k \in \Omega B$.

2.2 Método de soma de correntes

O método de soma de correntes resolve eficientemente o problema de fluxo de carga em SDEE. Este método usa um procedimento simples para determinar o ponto de operação do sistema. Além disso, caracteriza-se pelo uso de um equacionamento diferente ao usado pelo método de Newton-Raphson onde as variáveis de estado do sistema são atualizadas iterativamente através de varreduras desde as barras extremas até a subestação e vice-versa. Geralmente, estas varreduras são chamadas de varredura reversa (à montante) e varredura direta (à jusante), respectivamente. Esses caminhos à montante e à jusante são traçados após realizar um ordenamento em camadas do SDEE (SHIRMOHAMMADI, 1988).

De forma similar ao método de Newton-Raphson, neste método são definidos quatro variáveis para cada tipo de barra:

- a) Barra de referência (Subestação): Nesta barra V_{kr} e V_{ki} são especificados e P_k e Q_k são incógnitas;
- b) Barra de carga: Nesta barra P_k e Q_k são especificados e V_{kr} e V_{ki} são incógnitas;
- c) Barra de tensão controlada: Nesta barra V_k e P_k são especificados e V_{ki} e Q_k são incógnitas.

Cabe salientar que nas barras de tensão controlada especifica-se o módulo da tensão V_k e não sua parte real V_{kr} . Isto faz com que seja necessário implementar um procedimento chamado de método de compensação de reativos que possibilita a representação das barras PV nas análises de fluxo de carga (SHIRMOHAMMADI, 1995).

A formulação do método de soma de correntes é obtida a partir do cálculo das injeções de correntes nas barras do sistema:

$$I_k^{(i)} = \left(\frac{S_k}{V_k^{(i)}} \right)^* - Y_k^{sh} V_k^{(i)} \quad (13)$$

Após simplificar a expressão anterior e separando a parte real da parte imaginária, obtêm-se as seguintes expressões:

$$I_{kr}^{(i)} = \frac{P_k V_{kr}^{(i)} + Q_k V_{ki}^{(i)}}{(V_{kr}^{(i)})^2 + (V_{ki}^{(i)})^2} + Y_k^{sh} V_{ki}^{(i)} \quad (14)$$

$$I_{ki}^{(i)} = \frac{P_k V_{ki}^{(i)} - Q_k V_{kr}^{(i)}}{(V_{kr}^{(i)})^2 + (V_{ki}^{(i)})^2} - Y_k^{sh} V_{kr}^{(i)} \quad (15)$$

A partir de (14) e (15) e usando a varredura reversa podem ser calculadas as correntes $J_{mk_r}^{(i)}$ e $J_{mk_i}^{(i)}$, $\forall_{mk} \in \Omega_L$, tal como mostrado a seguir:

$$J_{mk_r}^{(i)} = -I_{kr}^{(i)} + \sum_{kl \in \Omega_L} J_{kl_r}^{(i)} \quad (16)$$

$$J_{mk_i}^{(i)} = -I_{ki}^{(i)} + \sum_{kl \in \Omega_L} J_{kl_i}^{(i)} \quad (17)$$

Seguidamente, realizando a varredura direta são calculadas as tensões nas barras através das seguintes equações:

$$V_{kr}^{(i)} = V_{mr}^{(i)} - r_{mk} J_{mk_r}^{(i)} + x_{mk} J_{mk_i}^{(i)} \quad (18)$$

$$V_{ki}^{(i)} = V_{mi}^{(i)} - r_{mk} J_{mk_i}^{(i)} - x_{mk} J_{mk_r}^{(i)} \quad (19)$$

O processo iterativo continua até satisfazer a condição de convergência. Portanto, calcula-se em cada iteração os erros entre as potências calculadas e as potências especificadas, tal como segue:

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - P_k \quad (20)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - Q_k \quad (21)$$

Onde P_k e Q_k podem ser calculados a partir da seguinte equação:

$$S_k = V_k I_k^* - Y_k^{sh} |V_k|^2 \quad (22)$$

Desta forma, os passos do algoritmo de fluxo de carga de soma de correntes podem ser organizados da seguinte forma:

- i) **Dados de entrada:** Valores dos componentes do sistema e as grandezas conhecidas: P_k^{esp} nas barras PV e PQ , Q_k^{esp} nas barras PQ , V_k^{esp} nas barras PV , V_{kr}^{esp} e V_{ki}^{esp} na barra $V\theta$;
- ii) **Início do processo iterativo:** Inicializar o contador de iterações $i = 0$. Fazer $P_k = P_k^{esp}$ nas barras PV e PQ e $Q_k = Q_k^{esp}$ nas barras PQ ;
- iii) **Inicialização das variáveis de estado:** Estimar os valores iniciais de $V_{kr}^{(i)}$ e $V_{ki}^{(i)}$, $\forall_k \in \Omega_B$ e $Q_k^{(i)}$ nas barras PV ;
- iv) **Calcular as injeções de corrente:** Usando (14) e (15) calcular $I_{kr}^{(i)}$ e $I_{ki}^{(i)}$ em todas as barras do SDEE;
- v) **Varredura reversa:** Realizando uma varredura desde as barras extremas até a subestação, calcular através de (16) e (17) as correntes $J_{mkr}^{(i)}$ e $J_{mki}^{(i)}$, $\forall_{mk} \in \Omega_L$;
- vi) **Varredura direta:** Realizando uma varredura desde a subestação até as barras extremas, calcular as tensões $V_{kr}^{(i)}$ e $V_{ki}^{(i)}$, $\forall_k \in \Omega_B$;
- vii) **Crítério de convergência:** Calcular ΔP_k nas barras PV e PQ usando (18) e ΔQ_k nas barras PQ usando (19). Se $\max\{|\Delta P_k^{(i)}|, |\Delta Q_k^{(i)}|\} \leq tol$, então vá ao passo ix. Caso contrário, fazer $i = i + 1$ e ir ao passo viii;
- viii) **Método de compensação de reativos:** Atualizar os valores de $Q_k^{(i)}$ e ir ao passo iv;
- ix) **Apresentação dos resultados:** O ponto de operação do sistema é dado pelos valores de $V_{kr}^{(i)}$ e $V_{ki}^{(i)}$, $\forall_k \in \Omega_B$.

3. Modelo matemático do problema do fluxo de carga

A abordagem do problema de fluxo de carga via modelos matemáticos surge como uma alternativa importante nas análises dos SEP, pois, além da possibilidade de resolver problemas de otimização de maior complexidade matemática, permite diminuir o esforço computacional dos procedimentos iterativos usados em fluxo de carga quando aplicados em SEP de grande porte.

A construção dos modelos matemáticos de fluxo de carga baseia-se na formulação de cada método. A seguir são apresentados os modelos matemáticos dos métodos de Newton-Raphson e soma de correntes.

3.1 Modelo matemático do método de Newton-Raphson

O fluxo de carga de Newton-Raphson pode ser representado matematicamente através do seguinte modelo não-linear:

$$\min \sum_{k \in \Omega_B} |\Delta P_k| + \sum_{k \in \Omega_B} |\Delta Q_k| \quad (23)$$

subject to

$$\Delta P_k = P_k^G - P_k^D - P_k \quad \forall_k \in \Omega_B \quad (24)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^G - Q_k^D - Q_k \quad \forall_k \in \Omega B \quad (25)$$

$$P_k = V_k \sum_{\forall_m \in \Omega B} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad \forall_k \in \Omega B \quad (26)$$

$$Q_k = V_k \sum_{\forall_m \in \Omega B} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad \forall_k \in \Omega B \quad (27)$$

Note que no modelo matemático anterior, a função objetivo mostrada em (23) visa minimizar a soma dos erros ΔP_k e ΔQ_k nas barras do sistema. As equações (24) e (25) calculam os valores de ΔP_k e ΔQ_k como a diferença entre as potências especificadas e as potências calculadas em cada barra do sistema. Finalmente, as equações (26) e (27) são usadas para calcular as potências ativa e reativa em cada barra do sistema.

A solução deste modelo matemático é dada pelas seguintes grandezas:

- V_k nas barras PQ .
- θ_k nas barras PV e PQ .
- P_k^G na barra $V\theta$.
- Q_k^G na barra $V\theta$ e nas barras PV .

3.2 Modelo matemático do método de soma de correntes

O fluxo de carga de soma de correntes pode ser representado matematicamente através do seguinte modelo não-linear:

$$\min \sum_{k \in \Omega B} |\Delta P_k| + \sum_{k \in \Omega B} |\Delta Q_k| \quad (28)$$

subject to

$$\Delta P_k = P_k^G - P_k^D - P_k \quad \forall_k \in \Omega B \quad (29)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^G - Q_k^D - Q_k \quad \forall_k \in \Omega B \quad (30)$$

$$P_k = V_{kr} I_{kr} + V_{ki} I_{ki} \quad \forall_k \in \Omega B \quad (31)$$

$$Q_k = -V_{kr} I_{ki} + V_{ki} I_{kr} - Y_k^{sh} (V_{kr}^2 + V_{ki}^2) \quad \forall_k \in \Omega B \quad (32)$$

$$I_{kr} = \frac{(P_k^G - P_k^D) V_{kr} + (Q_k^G - Q_k^D) V_{ki}}{V_{kr}^2 + V_{ki}^2} + Y_k^{sh} V_{ki} \quad \forall_k \in \Omega B \quad (33)$$

$$I_{kr} = \frac{(P_k^G - P_k^D) V_{ki} - (Q_k^G - Q_k^D) V_{kr}}{V_{kr}^2 + V_{ki}^2} - Y_k^{sh} V_{kr} \quad \forall_k \in \Omega B \quad (34)$$

$$\sum_{mk \in \Omega L} J_{mk_r} - \sum_{km \in \Omega L} J_{km_r} + I_{kr} = 0 \quad \forall_k \in \Omega B \quad (35)$$

$$\sum_{mk \in \Omega L} J_{mk_i} - \sum_{km \in \Omega L} J_{km_i} + I_{ki} = 0 \quad \forall_k \in \Omega B \quad (36)$$

$$V_{kr} - V_{mr} + r_{mk} J_{mk_r} - x_{mk} J_{mk_i} = 0 \quad \forall_{mk} \in \Omega L \quad (37)$$

$$V_{ki} - V_{mi} + r_{mk}J_{mk_i} + x_{mk}J_{mk_r} = 0 \quad \forall_{mk} \in \Omega L \quad (38)$$

$$V_{kr}^2 + V_{ki}^2 = V_k^{esp} \quad \forall_k \in \Omega PV \quad (39)$$

Da mesma forma que no modelo anterior, a função objetivo (28) minimiza a soma dos erros ΔP_k e ΔQ_k nas barras do sistema. Estes erros são calculados através das equações (29) e (30). Através das equações (31) e (32) calculam-se as potências ativas em cada barra do sistema. As correntes injetadas em cada barra são calculadas mediante as equações (33) e (34). Por sua vez, as correntes nos trechos do sistema são determinadas através das expressões (35) e (36). As tensões nodais são calculadas através das equações (37) e (38). Por fim, a equação (39) estabelece que o módulo tensão nas barras PV deve ser igual à tensão especificada da barra.

A solução deste modelo matemático é dada pelas seguintes grandezas:

- V_{kr} nas barras PQ .
- V_{ki} nas barras PV e PQ .
- P_k^G na barra $V\theta$.
- Q_k^G na barra $V\theta$ e nas barras PV .

4. Testes e resultados

Os modelos matemáticos desenvolvidos foram programados na linguagem matemática AMPL (FOURER, 2003). Devido à natureza não-linear da sua formulação foi usado o solver Knitro para a obtenção dos resultados do problema de fluxo de carga. As simulações do método de Newton-Raphson e soma de correntes foram realizadas nos sistemas-teste 5 nós (STEVENSON, 1986) e IEEE13 nós (KERSTING, 1991), respectivamente. As simulações foram realizadas em uma máquina Lenovo com processador Intel Core i7 e 8GB de RAM.

4.1 Sistema-teste 5 nós

Os dados de entrada do sistema-teste são mostrados nas Tabelas 1 e 2.

Barra No.	Tipo	P_k^G	Q_k^G	P_k^D	Q_k^D	V_k^{esp}	θ_k^{esp}
1	$V\theta$	****	****	0,6500	0,3000	1,0400	0,0000
2	PQ	0,0000	0,0000	1,1500	0,6000	****	****
3	PV	1,8000	****	0,7000	0,4000	1,0200	****
4	PQ	0,0000	0,0000	0,7000	0,3000	****	****
5	PQ	0,0000	0,0000	0,8500	0,4000	****	****

Fonte: Adaptado de William D. Stevenson (1986)

Tabela 1 – Valores em p.u. das grandezas nas barras do sistema-teste 5 nós

Linha No.	k	m	R_{km}	X_{km}	Y_{km}^{sh}
1	1	2	0,042	0,168	0,000
2	1	5	0,031	0,126	0,000
3	2	3	0,031	0,126	0,000
4	3	4	0,084	0,336	0,000
5	3	5	0,053	0,210	0,000
6	4	5	0,063	0,252	0,000

Fonte: Adaptado de William D. Stevenson (1986)

Tabela 2 – Valores em p.u. dos parâmetros das Linhas de Transmissão do sistema-teste 5 nós

Para determinar o ponto de operação do sistema foram realizadas 132 iterações em 0,068 segundos. O valor da função objetivo encontrada é igual a $4,5376 \cdot 10^{-9}$. Os resultados fornecidos pelo software AMPL são mostrados nas Tabelas 3 e 4.

Barra No.	Tipo	P_k^G	Q_k^G	P_k^D	Q_k^D	V_k	θ_k
1	$V\theta$	2,3529	1,1205	0,6500	0,3000	1,0400	0,0000
2	PQ	0,0000	0,0000	1,1500	0,6000	0,9588	-6,3319
3	PV	1,8000	1,2938	0,7000	0,4000	1,0200	-3,7707
4	PQ	0,0000	0,0000	0,7000	0,3000	0,9051	-10,8689
5	PQ	0,0000	0,0000	0,8500	0,4000	0,9603	-6,1206

Fonte: Próprio autor

Tabela 3 – Valores em p.u. das grandezas nas barras do sistema-teste 5 nós

Linha No.	k	m	P_{km}	Q_{km}	P_{km}	Q_{km}
1	1	2	0,7429	0,3534	-0,7166	-0,2483
2	1	5	0,9600	0,4671	-0,9273	-0,3343
3	2	3	-0,4334	-0,3517	0,4439	0,3944
4	3	4	0,4066	0,2683	-0,3874	-0,1917
5	3	5	0,2496	0,2310	-0,2437	-0,2077
6	4	5	-0,3126	-0,1083	0,3210	0,1420

Fonte: Próprio autor

Tabela 4 – Valores em p.u. dos fluxos de potência nas Linhas de Transmissão do sistema-teste 5 nós

Finalmente, os valores em p.u. das perdas de potência ativa e as perdas de potência reativa são dadas por $P_L = 0,1029$ e $Q_L = 0,4143$, respectivamente.

4.2 Sistema-teste IEEE13 nós

Nas simulações foram considerados os valores da fase A do sistema-teste IEEE13 nós. Neste sistema as demandas foram alteradas com o intuito de obter um cenário de demanda máxima. Os dados de entrada do sistema-teste são mostrados nas Tabelas 5 e 6.

Barra No.	Tipo	P_k^G	Q_k^G	P_k^D	Q_k^D	V_k^{esp}	θ_k^{esp}
1	$V\theta$	****	****	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
2	PQ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	****	****
3	PQ	0,0000	0,0000	1,7000	1,2500	****	****
4	PQ	0,0000	0,0000	3,8500	2,2000	****	****
5	PQ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	****	****
6	PQ	0,0000	0,0000	2,3000	1,3200	****	****
7	PQ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	****	****
8	PQ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	****	****
9	PQ	0,0000	0,0000	1,7000	1,5100	****	****
10	PQ	0,0000	0,0000	1,6000	1,1000	****	****
11	PQ	0,0000	0,0000	1,7000	0,8000	****	****
12	PQ	0,0000	0,0000	1,2800	0,8600	****	****
13	PQ	0,0000	0,0000	4,8500	1,9000	****	****

Fonte: Adaptado de Kersting (1991)

Tabela 5 – Valores em p.u. das grandezas das barras do sistema-teste IEEE13 nós

Linha No.	k	m	R_{km}	X_{km}	Y_{km}^{sh}
1	1	2	0,0008	0,0026	0,0000
2	2	3	0,0008	0,0008	0,0000
3	2	4	0,0008	0,0028	0,0000
4	3	6	0,0005	0,0001	0,0000
5	4	5	0,0004	0,0007	0,0000
6	4	7	0,0005	0,0005	0,0000
7	4	8	0,0004	0,0012	0,0000
8	4	9	0,0002	0,0001	0,0000
9	5	10	0,0024	0,0044	0,0000
10	7	11	0,0005	0,0005	0,0000
11	7	12	0,0013	0,0005	0,0000
12	9	13	0,0002	0,0001	0,0000

Fonte: Adaptado de Kersting (1991)

Tabela 6 – Valores em p.u. dos parâmetros das Linhas de Transmissão do sistema-teste IEEE 13 nós

Para determinar o ponto de operação do sistema foram realizadas 70 iterações em 0,126 segundos. O valor da função objetivo encontrada é igual a $7,2350 \cdot 10^{-11}$. Os resultados fornecidos pelo software AMPL são mostrados nas Tabelas 7 e 8.

Barra No.	Tipo	P_k^G	Q_k^G	P_k^D	Q_k^D	V_{kr}	V_{ki}
1	$V\theta$	19,7960	13,5011	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
2	PQ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9491	-0,0407
3	PQ	0,0000	0,0000	1,7000	1,2500	0,9434	-0,0416
4	PQ	0,0000	0,0000	3,8500	2,2000	0,9068	-0,0761
5	PQ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9052	-0,0767
6	PQ	0,0000	0,0000	2,3000	1,3200	0,9421	-0,0411
7	PQ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9042	-0,0766
8	PQ	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,9068	-0,0761
9	PQ	0,0000	0,0000	1,7000	1,5100	0,9050	-0,0759
10	PQ	0,0000	0,0000	1,6000	1,1000	0,8951	-0,0807
11	PQ	0,0000	0,0000	1,7000	0,8000	0,9028	-0,0770
12	PQ	0,0000	0,0000	1,2800	0,8600	0,9020	-0,0759
13	PQ	0,0000	0,0000	4,8500	1,9000	0,9037	-0,0759

Fonte: Próprio autor

Tabela 7 – Valores em p.u. das grandezas nas barras do sistema-teste IEEE13 nós

Linha No.	k	m	J_{km_r}	J_{km_i}
1	1	2	19,7960	-13,5011
2	2	3	4,1157	-2,9065
3	2	4	15,6803	-10,5945
4	3	6	2,3757	-1,5048
5	4	5	1,6631	-1,3788
6	4	7	3,1239	-2,1044
7	4	8	0,0000	0,0000
8	4	9	6,8798	-4,3485
9	5	10	1,6631	-1,3788
10	7	11	1,7944	-1,0391
11	7	12	1,3295	-1,0653
12	9	13	5,1535	-2,5353

Fonte: Próprio autor

Tabela 8 – Valores em p.u. das correntes nas Linhas de Transmissão do sistema-teste IEEE 13 nós

Finalmente, os valores em p.u. das perdas de potência ativa e as perdas de potência reativa são dadas por $P_L = 0,8160$ e $Q_L = 2,5611$, respectivamente.

5 Conclusões

Neste trabalho abordou-se o problema de fluxo de carga em SEP através dos modelos matemáticos dos métodos de Newton-Raphson e soma de correntes. A função objetivo e as restrições destes modelos matemáticos foram determinadas a partir do equacionamento de cada método.

Nos resultados obtidos, os valores da função objetivo indicam que o ponto de operação do sistema foi calculado satisfatoriamente e em um tempo relativamente curto. Portanto, pode-se concluir que os modelos matemáticos não-lineares apresentados neste trabalho conseguem calcular o ponto de operação do sistema da mesma forma que os procedimentos iterativos.

A importância deste trabalho pode ser destacada em dois aspectos fundamentais:

- a) A possibilidade de usar a modelagem matemática para resolver problemas de complexidade matemática, como é o caso do fluxo de carga em SEP.
- b) O uso da linguagem de programação matemática AMPL que se caracteriza pela simplicidade para representar computacionalmente os equacionamentos padrões dos modelos matemáticos.

Desta forma, incentiva-se à utilização de uma ferramenta de otimização matemática para a resolução de problemas em várias áreas da engenharia.

Referências

- BARAN, M.E.; WU, F.F.** *Optimal sizing of capacitors placed on a radial distribution networks*. IEEE Trans. Power Del. Vol. 4, n.1, p.735-743, 1989.
- CESPEDES, R.** *New method for the analysis of distribution networks*. IEEE Trans. Power Del. Vol. 5, n.1, p.391-396, 1990.
- FOURER, R.; GAY, R.M.; KERNIGHAN, B.W.** *AMPL: A modeling language for mathematical programming*. 2 ed. Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003.
- GALLEGO, R.A.; ROMERO, R.A.; ESCOBAR, A.H.** *Flujos de carga en redes de energía eléctrica*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira, 2004.
- GLOVER, J.D.** *Sistemas de Potencia: Análisis y Diseño*. México: Thomson Learning, 2004.
- KERSTING, W.H.** *Radial distribution test feeders*. IEEE Trans. Power Syst. Vol. 6, n.3, p.975-985, 1991.
- MONTICELLI, A.** *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*. São Paulo: Edgar Blucher Ltda, 1983.
- SHIRMOHAMMADI, D.** *A compensation method-based power flow method for weakly meshed distribution and transmission networks*. IEEE Trans. Power Syst. Vol. 3, n.2, p.753-762, 1988.
- SHIRMOHAMMADI, D; CHENG, C.S.** *A three-phase load flow method for real-time distribution system analysis*. IEEE Trans. Power Syst. Vol. 10, n.2, p.671-679, 1995.
- STEVENSON, W.D.** *Elementos de análise de sistemas de potência*. São Paulo: Mc Graw Hill, 1986.
- TINNEY, W.F.; HART, C.E.** *Power flow solution by Newton's method*. IEEE Trans. Power App. Syst. Vol. 86, n.11, p.1449-1460, 1967.