

Análise de Regressão para Modelagem de Tempo até a Falha Aplicada em um Estudo Didático

José Flávio Rique Júnior, Roberto Martiniano Júnior, Rogério Santana Peruchi, Débora Freire Stepple de Aquino, Ruan Eduardo Carneiro Lucas

Resumo: Na literatura são poucos os trabalhos de casos didáticos que são relacionados a aplicações de métodos e técnicas estatísticas. Esta pesquisa tem por objetivo apresentar um estudo didático para treinamento de engenheiros, profissionais da área e até mesmo estudantes de graduação e pós-graduação no desenvolvimento de modelos de otimização da confiabilidade de produtos. Foi realizada uma análise estatística com dados reais de um experimento com protótipos para que fosse gerado um modelo de regressão. A pesquisa demonstrou ao final que, o modelo padrão não tinha os melhores índices de confiabilidade, e sim um dos protótipos dos experimentos com as características originais alteradas.

Palavras chave: Confiabilidade, Tempo até a Falha, Regressão Múltipla, Estudo Didático.

Regression Analysis for Time Modeling until Failure applied in a didactic study

Abstract: In the literature there are few didactic case studies that are related to the application of statistical methods and techniques. This research aims to present a didactic study for the training of engineers, professionals and even undergraduate and graduate students in the development of models for optimizing product reliability. Statistical analysis was performed with real data from a prototype experiment to generate a regression model. In the end, the research showed that the standard model did not have the best reliability indexes, but one of the prototypes of the experiments with the original characteristics altered.

Key-words: Reliability, Time to Failure, Multiple Regression, Didactic Study.

1. Introdução

Na década de 70, o estudo de confiabilidade esteve centrado na análise dos riscos associados à construção e operação de usinas nucleares (KNIGHT, 1991). A partir desse estudo, algumas áreas de aplicação, associadas à engenharia de produção foram elencadas por Rausand & Høyland (2003) como qualidade e otimização da manutenção. Montgomery, Peck, e Vining (2012) observaram que análise de regressão pode utilizar um estudo retrospectivo, um estudo observacional ou um experimento planejado. Projetos de experimentos com o intuito de obter qualidade são diversos. Contudo, conforme relata Rigdon et al. (2012), aplicações de modelagem em experimentos de confiabilidade são menos comuns. Na literatura há exemplos de casos didáticos para aplicação de métodos e técnicas estatísticas como o trabalho de Johnson et al. (2006) aplica o DMAIC “Seis Sigma” no famoso experimento do “helicóptero de papel”.

Esta pesquisa tem por objetivo apresentar um estudo didático para treinamento de engenheiros no desenvolvimento de modelos para otimização da confiabilidade de produtos. Foi feita uma análise estatística com os dados para que seja gerado um modelo de regressão. A pesquisa demonstrou que o modelo padrão não tinha os melhores índices de confiabilidade, e sim um dos protótipos com características alteradas.

2. Fundamentação teórica

2.1 Confiabilidade de sistemas

Fogliatto e Ribeiro (2009) definem confiabilidade como a probabilidade de desempenhar adequadamente o seu propósito especificado, por um determinado período de tempo e sob condições ambientais pré-determinadas. As medidas de confiabilidade mais importantes e de grande utilidade prática são a função de confiabilidade $R(t)$ e o tempo médio até falha MTTF (*mean time to failure*) (FOGLIATTO, RIBEIRO, 2009).

Para uma variável T distribuída continuamente, a densidade de probabilidade dada por $f(t)$ é dada por (FOGLIATTO, RIBEIRO, 2009):

$$f(t) = F'(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (1)$$

onde $F(t)$ é a probabilidade de falha da unidade no intervalo de tempo $(0, t]$. Para valores pequenos de Δt , a seguinte aproximação pode ser usada:

$$P(t < T \leq t + \Delta t) \approx f(t) \cdot \Delta t. \quad (2)$$

Considerando n_o um número total de unidades submetidas a um teste. Após um certo período Δt , $n_f(t)$ unidades falharam e $n_s(t)$ unidades sobreviveram. Temos assim $n_o = n_f(t) + n_s(t)$. Logo, a confiabilidade $R(t)$ da unidade é definida da seguinte forma (FOGLIATTO, RIBEIRO, 2009):

$$R(t) = \frac{n_s(t)}{n_s(t) + n_f(t)} = \frac{n_s(t)}{n_o} \quad (3)$$

A função de distribuição de T , $F(t)$, é o complemento de $R(t)$, ou seja:

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t f(u)du = \int_t^{+\infty} f(u)du \quad (4)$$

O tempo média até a falha de uma unidade, designado por MTTF, nada mais é do que o valor esperado da variável T e é definido como (FOGLIATTO, RIBEIRO, 2009):

$$MTTF = E(T) = -\int_0^{+\infty} tf(t)dt, \quad (5)$$

onde $f(t)$, chamada de função densidade de probabilidade, é dada por:

$$f(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(u)du}, \quad t \geq 0.$$

A expressão alternativa para a MTTF, é dada por:

$$MTTF = -\int_0^{+\infty} R(t)dt, \quad (6)$$

sendo essa expressão mais simples, se comparada à expressão na eq. (5).

2.2 Distribuições para modelar tempo até a falha

2.2.1 Distribuição Exponencial

A função de densidade, a confiabilidade e o tempo médio até a falha para a distribuição exponencial são dados abaixo:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (7)$$

$$R(t) = e^{-\lambda t} \quad (8)$$

$$MTTF = E[T] = 1/\lambda \quad (9)$$

2.2.2 Distribuição Weibull

Para Fogliatto e Ribeiro (2009), a distribuição Weibull é apropriada na modelagem de tempos até falha apresentando funções de risco constante, estritamente crescente e estritamente decrescente. Para $t \geq 0$, $\gamma > 0$ e $\Theta > 0$, são fornecidas as seguintes equações para Weibull:

$$f(t) = \frac{\gamma}{\Theta} t^{\gamma-1} e^{-t^\gamma/\Theta} \quad (10)$$

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\Theta}\right)^\gamma} \quad (11)$$

$$MTTF = \Theta \Gamma(1 + 1/\gamma) \quad (12)$$

Onde temos γ como parâmetro de forma (shape) e Θ como parâmetro de escala (scale).

2.2.3 Distribuição Lognormal

As medidas de confiabilidade de interesse para a distribuição lognormal são ($t \geq 0$):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right]^2\right\} \quad (13)$$

$$R(t) = \Phi\left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma}\right) \quad (14)$$

$$MTTF = e^{(\mu + \sigma^2)/2}, \quad (15)$$

onde $\Phi(x)$ é o valor da função de distribuição da distribuição padronizada avaliada em x (FOGLIATTO, RIBEIRO, 2009).

2.2.4 Distribuição de Menor Valor Extremo

A distribuição de valor extremo, possui uma íntima relação com a distribuição Weibull, de forma que se em T temos uma distribuição Weibull, teremos em $Y = \log(T)$ uma distribuição de valor extremo (LAWLESS, 2003). Uma variável Y tem distribuição de valor extremo se tiver função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[\frac{t-\mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right] \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (16)$$

Em que $\sigma = 1/\delta$ e $\mu = \log(\alpha)$. O comportamento da densidade de probabilidade pode ser visto na Figura 4. A confiabilidade será dada por:

$$R(t) = \exp\left\{-\exp\left\{-\frac{t-\mu}{\sigma}\right\}\right\} \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (17)$$

2.2.5 Distribuição Loglogística

A distribuição loglogística tem como função de densidade e confiabilidade, respectivamente (LAWLESS, 2003):

$$f(t) = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\left[1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]^2}, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$R(t) = \left[1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]^{-1}, \quad (19)$$

2.2.6 Distribuição Logística

Se temos T para distribuição loglogística, teremos para logística um Y tal que $Y = \log T$. Assim, a função logística terá a seguinte função de densidade (LAWLESS, 2003):

$$f(y) = \frac{b^{-1} \exp[(y-u)/b]}{\{1 + \exp[(y-u)/b]\}^2} \quad -\infty < y < \infty, \quad (20)$$

onde $u = \log \alpha$ e $b = \beta^{-1}$, de modo que $-\infty < u < \infty$ e $b > 0$.

2.3 Análise de regressão com dados de confiabilidade de processos

Montgomery, Peck e Vining (2012) definem análise de regressão como uma técnica estatística usada para investigar e modelar a relação entre variáveis.

O estudo apresentado neste trabalho, abordará uma regressão com mais de um regressor, para isto, precisa-se de um modelo que denominamos Modelo de Regressão Múltipla (MONTGOMERY, PECK e VINING, 2012). Em um modelo com k regressores (x_1, x_2, \dots, x_k), teremos a seguinte equação para regressão múltipla:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon. \quad (22)$$

Considere os dados (y_i, x_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Assumindo que os erros do modelo de regressão são NID $(0, \sigma^2)$, então as observações y_i nesta amostra são variáveis aleatórias normalmente e independentemente distribuídas com média $\beta_0 + \beta_1 x_i$ e variância σ^2 . Se considerarmos esta distribuição conjunta com as observações dadas e os parâmetros β_0, β_1 e σ^2 constantes desconhecidas, temos a função de verossimilhança. Para o modelo de regressão linear simples com erros normais, a função de verossimilhança é:

$$\begin{aligned} L(y_i, x_i | \beta_0, \beta_1, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2\right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2\right] \end{aligned} \quad (23)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores dos parâmetros, digamos, $\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1$ e $\bar{\sigma}^2$, que maximizam L , ou equivalentemente, $\ln L$. Assim,

$$\begin{aligned} \ln L(y_i, x_i | \beta_0, \beta_1, \sigma^2) &= -\left(\frac{n}{2}\right) \ln 2\pi - \left(\frac{n}{2}\right) \ln \sigma^2 \\ &= -\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1$ e $\bar{\sigma}^2$ devem satisfazer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} \Big|_{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\sigma}^2} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{\beta}_0 - \bar{\beta}_1 x_i) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} \Big|_{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\sigma}^2} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{\beta}_0 - \bar{\beta}_1 x_i) x_i = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} \Big|_{\bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\sigma}^2} = \frac{n}{2\bar{\sigma}^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}^4} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{\beta}_0 - \bar{\beta}_1 x_i)^2 = 0$$

A solução da equação (25) fornecerão os estimadores de máxima verossimilhança:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_0 &= \bar{y} - \bar{\beta}_1 \bar{x} \\ \bar{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ \bar{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{\beta}_0 - \bar{\beta}_1 x_i)^2}{n} \end{aligned} \quad (26)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança são também estimadores consistentes que diferem do valor verdadeiro do parâmetro por uma quantidade muito pequena quando n se torna grande (MONTGOMERY, PECK e VINING, 2012). Os estimadores de máxima verossimilhança requerem uma suposição distributiva completa, neste caso os erros

aleatórios seguem uma distribuição normal com os mesmos segundos momentos que os requeridos para as estimativas de mínimos quadrados (MONTGOMERY, PECK e VINING, 2012). O modelo de regressão múltipla em estudos de confiabilidade segue a forma geral:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \delta \varepsilon, \quad (27)$$

onde: $Y = \ln(\text{TTF})$ para modelos Weibull, exponencial, lognormal ou loglogístico ou $Y = \text{TTF}$ para modelos normal, valor extremo ou logístico; β_0 : valor de Y quando x_i e o percentil do termo de erro são zero; β_i : coeficiente associado a x_i ; x_i : fator (variável categórica) ou variável covariada (contínua); δ : é o parâmetro de scale. Para Weibull: $\text{scale} = 1/\text{shape}$; ε : é o termo de erro aleatório. Distribuição do erro depende da distribuição de TTF. Na Figura 1, podemos observar o resultado da distribuição do erro em função da distribuição de TTF.

Distribuição de TTF	Distribuição de erro
Weibull, exponencial ou valor extremo	Valor extremo, Location = 0 e Scale = 1
Normal ou lognormal	Normal, Location = 0 e Scale = 1
Logística ou loglogística	Logística, Location = 0 e Scale = 1

Figura 1 - Distribuição do erro em função da distribuição de TTF

3. Metodologia de pesquisa

3.1 Declaração do problema de confiabilidade

Algumas razões para executar experimentos incluem a triagem ou caracterização de fatores, que busca saber quais fatores têm mais influência sobre a(s) resposta(s) de interesse. Quando o sistema for caracterizado e é certo de que os fatores importantes foram identificados, o próximo objetivo é a otimização, onde encontra-se as configurações ou níveis de fatores importantes que resultam em valores da resposta. Já no experimento de confirmação, o experimentador geralmente está tentando verificar se o sistema opera ou se comporta de maneira consistente com alguma teoria ou experiência passada. Quando deseja-se determinar o que acontece quando exploramos novos materiais, novos fatores ou novo intervalo de fatores, usa-se experimento de descoberta. Experimentos de robustez abordam questões como: Em que condições as variáveis de interesse se degradam seriamente? A abordagem sequencial, emprega-se uma série de experimentos menores, cada um com um objetivo específico, assim tenta-se evitar a perda de tempo caso o experimento fosse abrangente como a triagem de fatores, é uma estratégia melhor.

3.2 Definição da variável de tempo até a falha ocorrer

Em testes de vida com n unidades idênticas e numeradas, que permitem analisar a falha de todas as n unidades, o conjunto de dados de tempo-até-falha obtido é dito completo. Fogliatto e Ribeiro(2009) definem dados censurados como aqueles para os quais se conhece um limite no tempo-até-falha, mas não o seu valor exato. O tipo de censura mais frequente em testes de tempo-até-falha é a chamada censura à direita. Os três tipos de censura à direita mais comuns nos ensaios de confiabilidade são: censura tipo I, censura tipo II e censura aleatória. A censura tipo I interrompe seu teste em um tempo t_0 pré-determinado. Somente os tempos-até-falha das unidades que falharam antes de t_0 são conhecidos com exatidão. Obtém-se assim um conjunto de dados contendo r ($\leq n$) tempos-até-falha observados e $(n - r)$ tempos-até-falha censurados em t_0 . Na censura tipo II, o teste de vida é interrompido após a ocorrência da r -ésima falha pré-definida. Sendo este r um valor pré-definido que garanta uma modelagem estatística satisfatória dos resultados do teste. O tempo $T_{(r)}$ de término de

teste é aleatório. Na censura aleatória, as n unidades de teste são ativadas em momentos distintos no tempo e o teste é interrompido no tempo t_0 . Dados censurados à esquerda são característicos em estudos sociais, em que o tempo até falha não representa necessariamente uma falha, mas a ocorrência de algum evento de interesse do analista. A censura por intervalos consiste em obter os dados de tempo-até-falha agrupados em intervalos.

3.3 Definição das variáveis de controle e seus níveis

Os fatores que podem influenciar o desempenho de um processo podem ser classificados como potenciais fatores de projeto ou fatores blocáveis. Os fatores de projeto podem se classificar da seguinte maneira: fatores de projeto, fatores constantes e fatores permitidos a variar. Fatores blocáveis, por sua vez, podem ter grandes efeitos que devem ser levados em conta, mas podemos não estar interessados neles no contexto do presente experimento. Classificam-se em fatores controláveis, incontroláveis ou de ruído. Quando o experimento objetiva a triagem de fatores ou a caracterização do processo, é importante manter o número de níveis de fator baixo. Na triagem de fatores, a região de interesse, ou seja, o intervalo no qual os fatores são variados deve ser amplo.

3.4 Escolha do arranjo experimental

A escolha do design envolve a consideração do tamanho da amostra, a seleção de uma ordem de execução para os ensaios experimentais e a determinação de se há ou não fatores blocáveis ou outras restrições de aleatorização.

3.5 Realização dos experimentos

Ao executar o experimento, é importante monitorar cuidadosamente o processo para garantir que tudo esteja sendo feito de acordo com o planejado. Antes de conduzir o experimento, alguns testes são geralmente úteis fornecendo informações sobre a consistência do material experimental, uma verificação do sistema de medição, e uma ideia aproximada do erro experimental.

3.6 Análise estatística dos dados

Em experimentos de confiabilidade, o modelo empírico pode ser estimado pelo método de Máxima Verossimilhança. Os passos para análise estatística deste método são:

- a) Realizar os testes com os modelos de distribuição visando encontrar qual deles melhor se ajusta aos dados de confiabilidade, escolhendo a distribuição que possuir o menor valor estatístico de Anderson-Darling para resíduos padronizados. Os resíduos podem ser obtidos pela equação (28):

$$e_i = y' - y, \quad (28)$$

onde: e_i = resíduo, y' = valor previsto do modelo e y = valor experimental observado;

- b) Indicar os coeficientes dos fatores estudados a partir da equação (26);
- c) Verificar no modelo quais os fatores que mais influenciam na resposta do problema e a influência dos fatores para um percentil de 5% de falha acumulada;
- d) Verificar qual conjunto de dados apresenta maior tempo de vida para o referido percentual de 5%.

3.7 Conclusões e recomendações

Execuções de acompanhamento e testes de confirmação devem ser realizados para validar as conclusões do experimento.

4. Análise de resultados

4.1 Declaração do problema de confiabilidade

Uma empresa fictícia produz o modelo denominado papercóptero *Tp-1*. Para sua confecção, usa-se papel espesso (120 g/m²), com um comprimento de asa 3,0", comprimento de corpo 3,0", largura do corpo 4,75", e não se coloca nele nenhum tipo de acessório (clipe, fita, etc.).

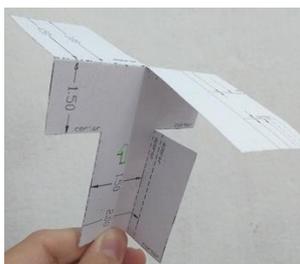


Figura 2 – Aeronave modelo Tp-1 fabricada pela empresa Transpaper

Em testes feitos, chegou-se a registrar para um tempo de 1,5s uma confiabilidade de 84,67% visto na seção 4.5 e 4.6. Maximizar o tempo em que a aeronave permanece voando é o objetivo principal deste experimento.

4.2 Definição da variável de tempo até a falha ocorrer

A variável de tempo analisada será a do tempo de queda do papercóptero, O teste é realizado de tal maneira que é possível observar todo o comportamento da aeronave do lançamento até a queda. A análise será feita com dados completos.

4.3 Definição das variáveis de controle e seus níveis

Os parâmetros variáveis são: tipo de papel (T_p) espesso (120 g/m²) ou Fino (75 g/m²), uso ou não-uso de clipe na aeronave (C) (não ou sim), comprimento da asa (3" ou 4,5") (R_r) e o comprimento do corpo (3" ou 4,75") (T_l). Optou-se por manter constante os parâmetros: largura do corpo, fita no corpo da aeronave e fita na asa e a Altura do lançamento dos protótipos é mantida constante.

4.4 Escolha do arranjo experimental

Utilizou-se um arranjo fatorial completo 2⁴. Para o fator resposta, tem-se o tempo até a falha em segundos (TTF). Desta maneira, será necessário a confecção de 16 protótipos. Pode-se observar na Figura 3 a combinação de parâmetros e seus níveis.

Aeronave	Parâmetros variáveis				Parâmetros mantidos constante		
	Tipo papel (T_p)	Clipe (C)	Comp. Asa em pol. (R_r)	Comp. Corpo em pol. (T_l)	Larg. Corpo em pol. (T_w)	Fita corpo	Fita asa
1 (padrão)	Espesso	Não	3,0	3,00	4,75	Não	Não
2	Fino	Não	3,0	3,00	4,75	Não	Não
3	Espesso	Sim	3,0	3,00	4,75	Não	Não
4	Fino	Sim	3,0	3,00	4,75	Não	Não
5	Espesso	Não	4,5	3,00	4,75	Não	Não
6	Fino	Não	4,5	3,00	4,75	Não	Não
7	Espesso	Sim	4,5	3,00	4,75	Não	Não
8	Fino	Sim	4,5	3,00	4,75	Não	Não
9	Espesso	Não	3,0	4,75	4,75	Não	Não
10	Fino	Não	3,0	4,75	4,75	Não	Não
11	Espesso	Sim	3,0	4,75	4,75	Não	Não

Figura 3 - Parâmetros da aeronave

Para o estudo em questão, o experimento foi realizado com 5 réplicas por protótipo.

4.5 Realização dos experimentos

O procedimento operacional padrão para a realização dos experimentos segue os seguintes passos: Confeção, imprimir o croqui nos dois tipos de papéis necessários para o teste, dobrar e recortar os protótipos obtendo assim os modelos desejados, colocar cliques nos protótipos necessários, numerar os protótipos conforme as características descritos Figura 3; Setup, determinar uma altura padrão para o lançamento do protótipo, verificar se o cronômetro e o computador para registro dos tempos estão funcionando; Experimento, os passos 1, 2 e 3 devem ser executados simultaneamente, combinando entre os operadores o exato momento em que iniciará o registro de tempo: Passo 1 – O operador responsável pelo lançamento solta o protótipo da altura estabelecida no passo 2 do setup. Para cada protótipo, o operador executará o teste 5 vezes; Passo 2 – O operador responsável pela cronometragem observa o momento em que a aeronave é lançada e registra cada tempo de queda dos protótipos; Passo 3 – O operador responsável pelo registro de tempo coloca em uma planilha todos os tempos de queda. Com 16 aeronaves para testes, com cinco réplicas para cada uma delas, ter-se-á assim um total de 80 tempos que serão registrados para a análise estatística. Figura 5, tem-se o seguinte registro de tempos até a falha de cada aeronave.

Aeronave	Réplica	TTF em segundos		Aeronave	Réplica	TTF em segundos
1	1	1,37		9	1	1,33
	2	1,57			2	1,45
	3	1,65			3	1,44
	4	1,6			4	1,49
	5	1,67			5	1,58
2	1	2,07		10	1	1,91
	2	2,13			2	2,18
	3	1,82			3	2,08
	4	2,05			4	1,95
	5	2,28			5	2,08
3	1	1,51		11	1	1,47
	2	1,84			2	1,5
	3	1,47			3	1,44
	4	1,7			4	1,42
	5	1,4			5	1,35
4	1	1,67		12	1	1,79
	2	1,58			2	1,67
	3	1,72			3	1,67
	4	1,46			4	1,65
	5	1,64			5	1,79
5	1	1,88		13	1	1,68
	2	1,89			2	1,66
	3	1,87			3	1,58
	4	1,87			4	1,7
	5	1,85			5	1,75
6	1	2,15		14	1	2,25
	2	2,35			2	2,32
	3	2,37			3	2,59
	4	2,37			4	2,42
	5	2,37			5	2,37
7	1	1,95		15	1	1,72
	2	1,95			2	1,72
	3	1,95			3	1,64
	4	1,72			4	1,66
	5	1,8			5	1,52
8	1	2,37		16	1	2,05
	2	2,14			2	1,84
	3	2,18			3	1,94
	4	2,17			4	1,84
	5	2,33			5	1,8

Figura 5 - Registro de Tempos-até-falha de cada aeronave

4.6 Análise estatística dos dados

Este modelo tem como base a equação 27. Os estimadores de máxima verossimilhança podem ser obtidas pela equação 26. Adotar-se-á a distribuição que possuir menor valor de AD, tendo como base a equação 28 de resíduos. As equações 7 a 20 correspondem aos modelos de distribuição que podem ser usadas nessa análise estatística. O primeiro passo da análise estatística dos dados é a observação do valor do Anderson-Darlin para resíduos padronizados para cada modelo de distribuição.

Modelo de distribuição	Anderson-Darlin (AD)
Exponencial	31,094
Weibull	1,478
Normal	0,509
Lognormal	0,400
Menor Valor Extremo	1,719
Loglogístico	0,328
Logístico	0,458

Figura 6 - Estatística de Anderson-Darlin (AD) em função de cada modelo de distribuição

O melhor modelo, bem como o melhor ajuste dos dados distribuídos no gráfico de resíduos padronizados de acordo com Figura 7, é o modelo de distribuição Loglogístico.

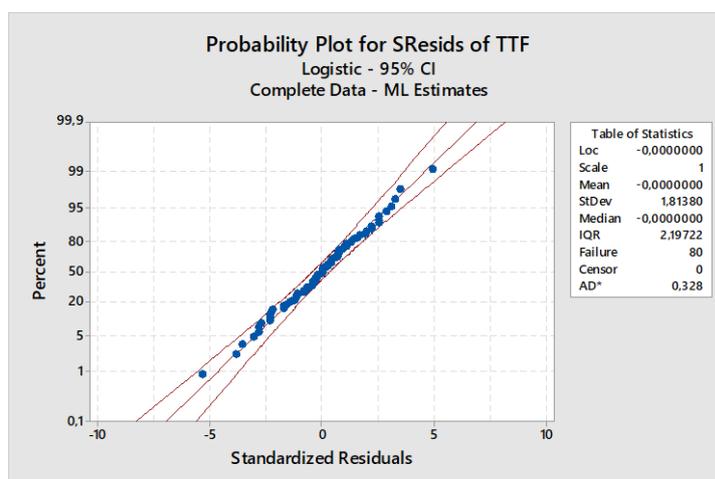


Figura 7 - Gráfico de probabilidade para resíduos padronizados - Modelo Loglogístico

O segundo passo é indicar os coeficientes dos fatores estudados a partir da equação (27). Estes coeficientes estão dispostos na Figura 8.

Termos	Coefficiente	Erro	Z	P-Value
Constante	0,262562	0,0616676	4,26	0,000
Tipo de Papel (Fino)	0,218140	0,0169815	12,85	0,000
Clipe (Sim)	-0,0875286	0,0171346	-5,11	0,000
Comprimento da Asa	0,108675	0,0113956	9,54	0,000
Comprimento do Corpo	-0,0361180	0,0098465	-3,67	0,000
Escala	0,0041124	-	-	-

Figura 8 - Modelo de Regressão

Observando em módulo, o parâmetro mais significativo é o tipo de papel. Os coeficientes dos regressores apresentará o seguinte modelo de regressão:

$$Y = \ln(\text{TTF}) = 0,263 + 0,218 T_p - 0,088 C + 0,109 R_r - 0,036 T_l + 0,0041\varepsilon \quad (30)$$

Como o modelo de distribuição é Loglogística, o valor de Y é igual a Ln(TTF), e não Y = TTF, conforme foi dito anteriormente. Observação: Os parâmetros “Tipo de Papel” e “Uso do Clipe” são categóricos, ou seja, no caso em que os coeficiente forem positivos, para se ter um maior TTF, recomenda-se adotar “Tipo de Papel” “Fino” ($T_p = 1$) e “Uso de Clipe” “Sim” ($C = 1$). Caso contrário, teremos “Tipo de Papel” “Espesso” ($T_p = 0$) e “Não” ($C = 0$) para uso do clipe. No resultado apresentado, adota-se o tipo de Papel fino e não se usa o clipe ($T_p = 1$ e $C = 0$). Seguindo com análise, será observado os fatores que mais influenciam na resposta do problema. De acordo com a Figura 9, para um percentil 5% a combinação de fatores que maximizam o TTF de um protótipo são Tipo de Papel Fino, o não uso de clipe, Comprimento de Asa 4,5” e Comprimento de Corpo 3,0”. De acordo com este gráfico o protótipo que apresentaria melhores resultados seria a aeronave 6.

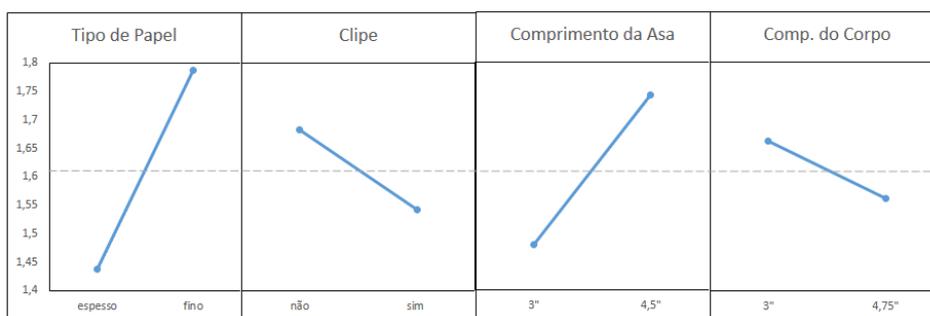


Figura 9 - Efeitos principais dos parâmetros para TTF

Finalmente, no quarto passo, verificou-se qual o conjunto de dados apresenta maior TTF para um percentil de 5%. Esses TTFs podem ser obtidos através da equação (28) e visto na Figura 10.

Percentil (%)	Protótipo	TTF (s)
5	1 (Padrão)	1,42108
5	2	1,76748
5	3	1,30198
5	4	1,61935
5	5	1,67268
5	6	2,08041
5	7	1,53250
5	8	1,90606
5	9	1,33404
5	10	1,65922
5	11	1,22223
5	12	1,52017
5	13	1,57023
5	14	1,95299
5	15	1,43863
5	16	1,78931

Figura 10 – Análise estatística dos fatores do modelo de regressão

A aeronave número 6 possui os melhores valores de TTF para um percentil de 5%, superando o TTF da aeronave até então produzida (protótipo 1). A Figura 12, de confiabilidade, oferece ao pesquisador os valores percentuais de probabilidade de sobrevivência para cada protótipo após 1,5 segundos de teste. O protótipo 6 tem uma confiabilidade 15,32% maior que a já é produzida. A confiabilidade para a distribuição Loglogística pode ser calculada por meio da equação (20).

T(s)	Protótipo	Confiabilidade (%)
1,5	1 (Padrão)	84,6705
1,5	2	99,8765
1,5	3	42,7589
1,5	4	99,0937
1,5	5	99,5658
1,5	6	99,9970
1,5	7	96,8761
1,5	8	99,9780
1,5	9	56,5680
1,5	10	99,4782
1,5	11	14,9766
1,5	12	96,2662
1,5	13	98,1842
1,5	14	99,9874
1,5	15	87,9702
1,5	16	99,9067

Figura 11 – Confiabilidade

4.7 Conclusões e recomendações

Aeronave número 6 possui as características que proporcionarão os melhores desempenhos de tempo-até-falha. Ou seja, a confecção de aeronaves terá o tipo de papel fino, sem uso do clipe na parte inferior do papercóptero, tendo como comprimento de asa R_r 4,5” e o comprimento do corpo T_l igual a 3,0”.

5. Conclusões

O objetivo de propor um estudo didático para aplicação da regressão em dados de TTF foi alcançado, trazendo conceitos bem definidos e equacionamentos à disposição do experimentador. A forma como o modelo de regressão foi obtido neste estudo didático, servirão de base para que o pesquisador possa maximizar o valor do tempo até a falha.

O valor de P apresentado nos resultados assegura ao experimentador que a alteração dos parâmetros são significativos para o desempenho do papercóptero. O uso de dados completos também assegura ao experimentador quanto aos resultados que são apresentados para o mesmo, pois representa completo. A diversidade de modelos de distribuições utilizados para a análise estatística dos dados proporciona resultados muito mais precisos, pois quanto mais variado for a análise com relação aos modelos testados, maior a possibilidade de achar um valor de Anderson-Darlin menor e conseqüentemente, dados mais bem ajustados no gráfico. Nesse trabalho, a distribuição Loglogística mostrou um valor de AD ligeiramente menor a distribuição Normal, o que mostra a importância de se experimentar outras distribuições além da normal. Observou-se também que o parâmetro mais significativo nesse experimento é o tipo de papel ($Z = 12,85$), onde a simples mudança deste fator, reduz o TTF do protótipo. A aeronave que obteve os resultados mais satisfatórios é a 6, com: Papel fino, Comprimento de Asa 4,5”, Comprimento de Corpo 3,0” e sem clipe. Esta apresentou o MTTF de 2,08s, enquanto que a padrão obteve 1,42s de tempo médio até a falha. Quanto a confiabilidade, a aeronave 6 mostrou-se superior às demais, tendo 99,99%, enquanto que a padrão obteve 84,67%.

REFERÊNCIAS

FOGLIATTO, F. S.; RIBEIRO, J. L. D. **Confiabilidade e Manutenção Industrial**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

JOHNSON, J. Adam et al. A “Six Sigma”© black belt case study: GEP Box's paper helicopter experiment part A. **Quality Engineering**, v. 18, n. 4, p. 413-430, 2006.

KNIGHT, C.R. **Four decades of reliability progress**. Proceedings of the Annual Reliability and Maintainability Symposium. [S.l.]: IEEE Reliability Society, 1991. p. 156-159.

LAWLESS, Jerald F. **Statistical Models and Methods for Lifetime Data - 2nd ed.** Hoboken, New Jersey: Wiley, 2003.

MONTGOMERY, D. C.; PECK, E. A.; VINING, G. G. **Introduction to Linear Regression Analysis – 5th ed.** Hoboken, New Jersey: Wiley, 2012.

RAUSAND, M.; HØYLAND, A. **System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications**. 2. ed. Nova York: John Wiley, 2003. 664p.

RIGDON, Steven E. et al. Experiments for reliability achievement. **Quality Engineering**, v. 25, n. 1, p. 54-72, 2012.