

PROBLEMA DE ROTEAMENTO DE ESTOQUE COM JANELAS DE TEMPO: UMA ABORDAGEM UTILIZANDO DESIGUALDES VÁLIDAS

Bruno Eckwert Demantova, Cassius Tadeu Scarpin

Resumo: Planejamentos táticos e operacionais de alta acurácia são essenciais para determinados tipos de operações, como por exemplo em empresas de entrega de bens perecíveis e de distribuição de combustíveis. Uma dificuldade expressiva na elaboração de um planejamento eficiente nestes casos é a incorporação de dinâmicas de janelas de tempo, impondo uma necessidade de controle de horários no processo de tomada de decisão. Este trabalho propõe um modelo matemático representativo para este tipo de problema, através de uma modelagem para o problema de roteamento de estoque com janelas de tempo (*Inventory Routing Problem with Time Windows - IRPTW*) sob o auxílio de uma heurística de solução inicial e de dois conjuntos de desigualdades válidas desenvolvidas para a resolução de problemas de roteamento de estoque. Uma configuração utilizando a heurística de solução inicial e desigualdades válidas para a melhoria dos limites associados às variáveis de estoque proporcionaram os melhores resultados dentre todas as avaliadas, apresentando melhores resultados em 7 de 12 casos. Os testes realizados também proporcionaram a obtenção de novas melhores soluções em todos os testes realizados, sendo estas melhorias na faixa de 7% – 40%. A eficiência computacional resultante da implementação destes grupos de desigualdades mostra a importância do aspecto de controle de estoque no problema, permitindo melhorias no desempenho geral do algoritmo e no controle da operação logística.

Palavras chave: Roteamento, Controle de Estoque, Janela de Tempo, Desigualdades Válidas.

THE INVENTORY-ROUTING PROBLEM WITH TIME WINDOWS: AN APPROACH USING VALID INEQUALITIES

Abstract: Tactical and operational planning are essential to the operation of many logistic chains, such as perishable products delivery and fuel distribution. One challenge that these supply chains face is incorporating time windows dynamics into the decision-making process, making service times an important parameter in the overall optimization process. This work proposes a representative model for this kind of problem, in the form of an Inventory-Routing Problem with Time Windows (IRPTW) coupled with an initial solution heuristic and two groups of valid inequalities designed for inventory-routing problems. A combination of the initial solution heuristic with a group of valid inequalities related to the improvement of inventory variables bounds presented the best results in 7 of 12 cases. The tests also obtained new best-known solutions for all 12 analyzed instances, with solutions 7% – 40% better than the previous ones. The resulting computational efficiency from the implementation of these valid inequality groups shows that inventory control considerations are vital in this sort of problem, providing improvements both in the general algorithm performance and in the overall supply-chain management.

Key-words: Routing, Inventory Control, Time Windows, Valid Inequalities.

1. Introdução

A constante evolução tecnológica de sistemas de controle de produção, tanto na parte de hardware e equipamentos quanto na complexidade dos softwares, tem permitido empresas a incorporar em seus planejamentos operacionais complexas dinâmicas observadas no mundo real. Modelos atuais consideram, em sua concepção, aspectos como homogeneidade de frota, políticas de reabastecimento de estoque, estrutura da cadeia de suprimentos, números de períodos de planejamento, dentre outros (GUIMARÃES et al. 2019).

No campo de estratégias de controle de estoques e roteamento de frotas veiculares, um grande desafio é a integração entre as janelas de atendimento dos clientes e o sequenciamento necessário para o atendimento adequado dos mesmos. Estas janelas de tempo, em conjunto com os aspectos citados anteriormente, podem tornar uma operação contínua bastante complexa, exigindo ferramentas e considerações apropriadas para a otimização do sistema resultante.

Produtos perecíveis como frutas, legumes e até mesmo alguns tipos de medicamentos, impõem uma necessidade de consumo mais imediata devido à sua perecibilidade. O planejamento de entregas tem um papel essencial nesses casos, pois a garantia da viabilidade dos produtos durante seu período de armazenamento e entrega aos clientes é essencial. Nestes tipos de problema, janelas de tempo exercem um papel fundamental na fundamentação matemática, pois impõem o atendimento dos clientes em horários pré-determinados e ajudam a elaborar roteirizações veiculares mais precisas, já que os horários de entrega e tempos de percurso devem ser monitorados.

O Problema de Roteamento de Estoque com Janelas de Tempo (*Inventory-Routing Problem with Time Windows* - IRPTW) foi elaborado a partir do Problema de Roteamento de Veículos com Janelas de Tempo (*Vehicle-Routing Problem with Time Windows* - VRPTW) e do Problema de Roteamento de Estoque (*Inventory-Routing Problem* - IRP), ambos bastante explorados na literatura e com diversas técnicas de resolução já disponíveis. A junção destes problemas, na forma do IRPTW, apresenta desafios maiores na etapa de resolução do problema e possui uma literatura ainda pouco explorada no meio acadêmico.

Lau et al. (2000) propuseram a decomposição do problema em subproblemas de distribuição e roteamento usando programação inteira e mista, programação de restrições e busca tabu para sua resolução. Extensões deste trabalho foram estudadas em Lau et al. (2002) e Lau et al. (2003), sendo utilizadas metodologias centradas em modelos de fluxo de rede e de procedimentos heurísticos, como algoritmos de colônia de formigas. Estes trabalhos, assim como muitos outros nesta área, utilizam adaptações das instâncias de Solomon (1987) para avaliar a eficiência computacional de seus métodos de resolução.

Liu e Lee (2011) elaboraram uma heurística de duas fases para a resolução de um modelo IRPTW com múltiplos veículos sob janelas de tempo não rígidas e tempos de ciclo de pedidos. Quatro outras heurísticas foram comparadas à esta nova abordagem de resolução, sendo utilizadas instâncias adaptadas do trabalho de Solomon (1987) para tal. Li et al. (2014) desenvolveram um modelo similar com o objetivo de minimizar o tempo total de viagem de uma cadeia logística real de combustíveis na China. Um modelo matemático em conjunto com um algoritmo de busca tabu e relaxação langrageana foram utilizados para a otimização da operação.

Existe um número considerável de trabalhos que demonstram a aplicação do IRPTW na operação logística de cadeias contendo produtos perecíveis. Hsu et al. (2007) desenvolveram uma abordagem baseada no VRPTW para a minimização do número de produtos estragados e de custos associados à cadeia de suprimentos, como custos de transporte e de estocagem dos alimentos. Osvald e Stirn (2008) utilizaram uma heurística com busca tabu para reduzir em cerca de 30% o número de vegetais estragados dentro de uma cadeia logística de alimentos da Eslovênia. Quando adicionadas considerações de dependência temporal no roteamento dos veículos, esta redução chegou a 47%.

Outras abordagens utilizadas para a melhoria da operação de cadeias logísticas de produtos alimentícios foram propostas pelos trabalhos de Rahimi et al. (2014), Rahimi et al. (2015) e Rahimi et al. (2017). O ponto comum destes trabalhos está em na abordagem multi-objetivo do problema, sendo explorados individualmente em cada um dos artigos conceitos relacionados a índices de qualidade de atendimento e de impacto ambiental.

Lappas et al. (2017) propuseram um modelo IRPTW multi-veículo e multi-período para a distribuição de um único produto, considerando restrições clássicas de *stock-out* (nível de estoque menor que zero) e sem entregas divididas. Os autores utilizaram uma heurística de duas fases para a minimização das distâncias percorridas pelos veículos, além de disponibilizar um conjunto de instâncias próprio para a avaliação de seu algoritmo. Este conjunto de instâncias é o único conjunto registrado, até o momento, para este problema na literatura.

Um fator comum entre grande parte dos trabalhos relacionados ao IRPTW está na especificidade de cada modelo elaborado. Muitos deles não abordam um caso geral e possuem características de difícil reprodução/adaptação para outros casos. Observa-se também uma lacuna em relação a aspectos de controle de estoque existentes nesses problemas. Em muitos dos trabalhos citados, não existe um planejamento multi-período ou um componente de custos/controle na parte de estocagem, ou até mesmo o monitoramento dos níveis de estoque nos clientes. Este trabalho tem como objetivo integrar estes aspectos em sua modelagem básica, fornecendo um modelo bastante geral porém com considerações que avaliam paralelamente aspectos de roteirização de veículos e controle de estoque.

Uma outra contribuição deste trabalho está na integração entre o IRPTW e conjuntos de desigualdades válidas desenvolvidas para problemas IRP. Poucos trabalhos mencionam o uso de ferramentas deste tipo, sendo uma possível causa para tal justamente a despriorização – ou até mesmo a desconsideração - do aspecto de controle de estoque no problema.

A Seção 2 deste artigo apresenta uma descrição do problema IRPTW estudado. A Seção 3 mostra a metodologia utilizada para a análise do problema proposto, demonstrando quais desigualdades válidas foram adicionadas ao modelo exato e o funcionamento da heurística de solução inicial. A Seção 4 apresenta os resultados e uma discussão sobre a eficácia das ferramentas consideradas. A seção 5 contém a conclusão acerca da abordagem proposta e possíveis melhorias e lacunas a serem abordadas em trabalhos futuros.

2. Descrição do Problema

O IRPTW pode ser descrito da seguinte maneira. Um grafo $G = (V, A)$, onde $V = \{0, \dots, N + 1\}$ é o conjunto de vértices e $A = \{(i, j): i, j \in V, i \neq j\}$ é o conjunto de arestas, estes representando as coordenadas do depósito e dos clientes de uma determinada cadeia de suprimentos e os arcos de roteamento que os ligam entre si, respectivamente. Os vértices 0 e

$N + 1$ representam a localização do depósito, sendo 0 o ponto de partida para as rotas do veículo e $N + 1$ o ponto final das rotas.

Para cada período de tempo $t \in \tau = (1, \dots, T)$, um conjunto de clientes $i \in C = (1, \dots, N)$ deve ter sua demanda conhecida d_i^t atendida enquanto mantém no máximo um número U_i de unidades em seus estoques. Os níveis de estoque são medidos pela variável I_i^t , que é controlada por uma política OU, determinando que sempre que ocorrer uma entrega, a quantidade x_i^t de produto será suficiente para satisfazer a demanda atual do cliente e maximizar seu nível de estoque no período.

Um determinado veículo de um conjunto $k \in \kappa = (1, \dots, K)$ pode visitar apenas um cliente por período de tempo e pode transportar no máximo uma quantidade de itens Q . Se um determinado cliente receber uma entrega em um determinado período de tempo, uma variável z_i^t terá valor 1, ou 0 caso contrário. A frota veicular é considerada com homogênea neste problema. A variável y_{ij}^{kt} será igual a 1 se o arco ij for percorrido pelo veículo k durante o período de tempo t , ou 0 caso contrário. Cada arco tem um custo de percurso c_{ij} igual à distância euclidiana entre os pontos i e j .

Todos os clientes devem ter seu atendimento iniciado dentro de um período de tempo específico que começa em HA_i e termina em HF_i . Um tempo de serviço s_i também é considerado para cada cliente, onde a variável a_i^{kt} representa o instante em que o cliente i começa a ser atendido. O tempo de viagem t_{ij} entre os vértices i e j é equivalente à distância euclidiana entre os respectivos pontos. Por fim, é também especificado que todos os clientes devem ser atendidos no último período de planejamento, de maneira a repor seus estoques e iniciar um novo período de ciclo de pedidos.

3. Metodologia

3.1 Modelo Matemático

O modelo matemático elaborado para o IRPTW está disponível a seguir.

$$\min W = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T c_{ij} y_{ij}^{kt} \quad (1)$$

Sujeito à:

$$I_i^0 = U_i, \quad \forall i \in C \quad (2)$$

$$I_i^t - I_i^{t-1} = \sum_{k=1}^K x_i^{kt} - d_i^t, \quad \forall i \in C, \forall t \in \tau \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^K x_i^{kt} \leq U_i - I_i^{t-1} + d_i^t, \quad \forall i \in C, \forall t \in \tau \quad (4)$$

$$x_i^{kt} \geq (U_i + d_i^t) z_i^{kt} - I_i^{t-1}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (5)$$

$$x_i^{kt} \leq (U_i + d_i^t) z_i^{kt}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^{kt} \leq Q z_0^{kt}, \quad \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^N y_{0j}^{kt} = z_0^{kt}, \quad \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^N y_{iN+1}^{kt} = z_{N+1}^{kt}, \quad \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} y_{ij}^{kt} = z_i^{kt}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} y_{ij}^{kt} = \sum_{j=0}^N y_{ji}^{kt}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^K z_i^{kt} \leq 1, \quad \forall i \in C, \forall t \in \tau \quad (12)$$

$$a_i^{kt} + s_i + t_{ij} \leq a_{ij}^{kt} + M_{ij}(1 - y_{ij}^{kt}), \quad \forall i, j \in V, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (13)$$

$$a_i^{kt} \geq HA_i z_i^{kt}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (14)$$

$$a_i^{kt} \leq HF_i z_i^{kt}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (15)$$

$$I_i^T = U_i, \quad \forall i \in C \quad (16)$$

$$x_i^{kt} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (17)$$

$$I_i^t \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i \in C, \forall t \in \tau \quad (18)$$

$$a_i^{kt} \in \mathbb{R}^+, \quad \forall i \in V, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (19)$$

$$z_i^{kt} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (20)$$

$$y_{ij}^{kt} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j \in V, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (21)$$

A função objetivo (1) minimiza os custos do trajeto resultantes da otimização do problema. A restrição (2) é responsável por inicializar o estoque dos clientes com U_i unidades, enquanto a restrição (3) determina o fluxo de estoque imposto aos clientes. As restrições (4) até (6) são referentes à política de reabastecimento OU. As restrições (7) garantem que as capacidades dos veículos sejam respeitadas. As restrições (8) até (11) são referentes ao roteamento de veículos. As restrições (12) determinam que no máximo um veículo pode ser designado para entrega por cliente. As restrições (13) são responsáveis pelo sequenciamento de horários da rota e também são responsáveis por evitar a formação de subciclos. As restrições (14) e (15) impõem o atendimento dos clientes dentro de janelas de tempo conhecidas. As restrições (16) implicam no atendimento de todos os clientes no último período de planejamento, dando início a um novo ciclo de planejamento de pedidos. As restrições (17) até (21) são referentes ao domínio das variáveis.

3.2 Desigualdades Válidas de Roteamento

Quando considerado o conjunto completo de desigualdades válidas estudado neste trabalho, pode-se realizar uma separação entre desigualdades referentes ao componente de roteamento veicular e ao componente de controle de estoque. As desigualdades disponíveis a seguir são oriundas do trabalho de Coelho e Laporte (2015), atuando essencialmente na relação entre variáveis de designação e de uso de arco.

$$y_{0i}^{kt} \leq z_i^{kt}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (22)$$

$$y_{ij}^{kt} \leq z_i^{kt}, \quad \forall i, j \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (23)$$

$$z_i^{kt} \leq z_0^{kt}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa, \forall t \in \tau \quad (24)$$

$$z_0^{kt} \leq z_0^{k-1t}, \quad \forall k \in \kappa \setminus \{1\}, \forall t \in \tau \quad (25)$$

$$z_i^{kt} \leq \sum_{j=1}^i z_j^{k-1t}, \quad \forall i \in C, \forall k \in \kappa \setminus \{1\}, \forall t \in \tau \quad (26)$$

As desigualdades (22) determinam que se fornecedor for o sucessor imediato do cliente contido na rota do veículo k no período t , então este cliente deverá ser atendido pelo mesmo veículo. Um raciocínio similar é aplicado no uso das desigualdades (23) entre os clientes. As desigualdades (24) designam o atendimento do fornecedor caso qualquer cliente seja designado para atendimento por um mesmo veículo k no período t . Os conjuntos de restrições (25) e (26) são referentes à quebra de simetria, que são aplicáveis para casos com frotas homogêneas de veículos.

3.3 Desigualdades Válidas de Controle de Estoque

Em relação a desigualdades válidas que atuam nas variáveis de designação de entregas ou de nível de estoque, um último grupo de desigualdades presente no trabalho de Coelho e Laporte (2015) foi usado, que garante que o cliente i seja atendido no mínimo o número de vezes equivalente ao lado direito da inequação.

$$\sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T z_i^{kt} \geq \frac{\sum_{t=1}^T d_i^t - I_i^0}{U_i}, \quad \forall i \in C, \forall t \in \tau \quad (27)$$

Outro grupo de desigualdades de interesse são as desenvolvidas no trabalho de Lefever (2018). O autor propõe o uso de variáveis adicionais, denominadas estoque residual ($I0_i^t$) e demanda residual (\bar{d}_i^t), para a correção dos limites das variáveis de controle de estoque.

$$I0_i^t = \max \left\{ 0, I_i^0 - \sum_{l=1}^t d_i^l \right\}, \quad \forall i \in C, \forall t \in \tau \quad (28)$$

$$d_i^t \leq \begin{cases} \max\{0, d_i^1 - I_i^0\}, & \text{se } t = 1 \\ \max\{0, d_i^t - I0_i^{t-1}\}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad \forall t \in \tau \quad (29)$$

A equação (28) determina a quantidade de estoque residual a partir da quantidade de produto consumida entre o período inicial e o período atual t . A equação (29) é referente à quantidade de demanda de produtos que excede o estoque residual em um determinado período. Com o passar do tempo, a tendência natural é que o estoque residual atinja valor zero e que a demanda residual com o passar dos períodos aumente. Utilizando estes conceitos, dois outros grupos de desigualdades válidas podem ser adicionados ao problema.

$$\sum_{l=t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^K z_i^{kl} \geq \frac{\sum_{l=t_1}^{t_2} d_i^l - I_i^{t_1-1}}{\min \{U_i, Q, \sum_{l=t_1}^{t_2} d_i^l\}}, \quad i \in C, t_1, t_2 \in \tau \setminus \{1\}, t_2 \geq t_1 \quad (30)$$

$$\sum_{l=1}^t \sum_{k=1}^K z_0^{kl} \geq \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{l=1}^t \bar{d}_i^l}{Q} \right\rceil, \quad t \in \tau \quad (31)$$

As desigualdades (30) e (31) relacionam os estoques e demandas residuais com as variáveis de designação. Outro grupo de desigualdades relacionado a sub-entregas também pode ser incorporado ao problema de maneira a melhorar o desempenho da otimização. Considerando

um grupo de períodos $\tau_{i,t}^-$, referente aos períodos em que uma sub-entrega ao cliente i é suficiente para satisfazer sua demanda no período t , restrições podem ser elaboradas para designar entregas neste espaço de tempo.

$$\sum_{t \in \tau_{i,t}^-} \sum_{k=1}^K z_i^{kt} \geq 1, \quad i \in C \tag{32}$$

Outro artifício proposto por Lefever (2018) é o uso de limites melhorados para as variáveis de controle de estoque. Isto é feito através das desigualdades descritas a seguir.

$$I_i^t \geq IO_i^t, \quad i \in C, t \in \tau \tag{33}$$

$$\sum_{k=1}^K x_i^{kt} \leq U_i - IO_i^t + \bar{d}_i^t, \quad i \in C, t \in \tau \tag{34}$$

3.4 Heurística de Solução Inicial

Uma heurística construtiva de solução inicial foi elaborada com o objetivo de melhorar o desempenho computacional do modelo. O objetivo desta heurística é a de obtenção rápida de uma solução factível por meio de um procedimento de inserção mais econômica. A **Erro! Fonte de referência não encontrada.** 1 apresenta o procedimento de cálculo executado pela heurística.

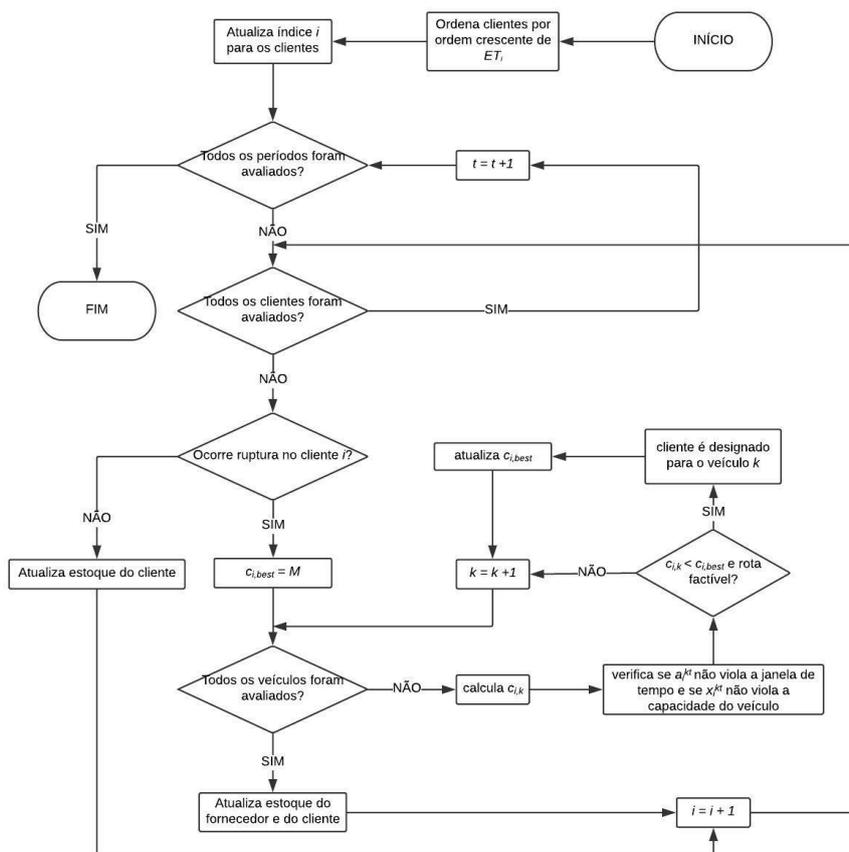


Figura 1 - Heurística construtiva de solução inicial

O procedimento inicia com o rearranjo dos índices dos clientes de acordo com seus

respectivos parâmetros HA_i . Esse passo é realizado de modo a diminuir a probabilidade de ocorrência de soluções infactíveis nos procedimentos posteriores, que são dependentes dos parâmetros relacionados às janelas de tempo dos clientes e dos tempos de percurso e atendimento dos mesmos.

Em seguida inicia-se o procedimento de inserção de clientes nas rotas k . Caso seja apontada a ocorrência de ruptura em um determinado cliente (estoque é menor que zero no período), um custo de inserção é calculado para todas as rotas veiculares disponíveis (K é admitido como um valor suficientemente grande inicialmente – em torno de 20 - de modo a garantir a factibilidade do problema) e, caso o cálculo das variáveis a_i^{kt} e x_i^{kt} demonstrem que não há infactibilidade na rota resultante, é feita a comparação entre o custo atual de inserção com os outros já efetuados, designando o cliente para a rota com o menor custo.

Quando todos os clientes em todos os períodos forem avaliados, o procedimento se encerra e a solução resultante é alimentada no *solver* como solução inicial do modelo matemático proposto.

4. Resultados

Para a realização dos testes no modelo, as instâncias elaboradas e disponibilizadas publicamente por Lappas et al. (2017) foram utilizadas. Este grupo de instâncias, elaborado especificamente para o IRPTW, é uma adaptação das instâncias propostas por Solomon (1987). Dentre alguns dos dados disponíveis nestes exemplos encontram-se: coordenadas de clientes, demandas por período e intervalos de tempo para o atendimento dos clientes.

Seis classes de instâncias foram avaliadas: C100, C200, R100, R200, RC100 e RC200. Os autores disponibilizaram instâncias em três tamanhos: 25, 50 e 100 clientes. Nesta etapa de testes, foram consideradas instâncias com 25 e 50 clientes, totalizando 12 diferentes instâncias avaliadas. Os resultados obtidos estão dispostos nas tabelas 1, 2 e 3. Nestas tabelas, os índices representam as seguintes configurações de teste:

- (1) Modelo matemático com o uso da heurística de solução inicial;
- (2) Desigualdades válidas para o componente de roteamento;
- (3) Desigualdades válidas para o componente de controle de estoque.

Instância	c = 25	c = 50
C101	6	10
C201	3	5
R101	10	14
R201	7	11
RC101	7	12
RC201	3	5

Tabela 1 - Número de veículos estipulados pela heurística de solução inicial

A tabela 1 apresenta o número de veículos determinado pela heurística de solução inicial, estes utilizados como o valor máximo de veículos para cada problema, diminuindo assim a complexidade do modelo resultante.

Instâncias		(1)			(1) + (2)		
C	Classe	F.O.	Gap	Tempo (s)	F.O.	Gap	Tempo (s)
25	C101	911,39	22,56%	7200	929,23	23,06%	7200
	C201	665,71	0,00%	20,17	665,71	0,00%	20,67
	R101	1682,85	0,00%	14,43	1682,85	0,00%	34,83
	R201	1407,57	0,00%	2631,27	1407,57	0,00%	3762,84
	RC101	1623,76	12,01%	7200	1614,35	11,13%	7200
	RC201	1083,72	0,00%	457,22	1083,72	0,00%	198,39
50	C101	1969,35	31,96%	7200	2028,05	35,45%	7200
	C201	1214,01	2,25%	7200	1214,01	6,73%	7200
	R101	3069,58	0,26%	7200	3069,58	0,67%	7200
	R201	2314,75	1,45%	7200	2353,84	7,91%	7200
	RC101	3461,04	19,84%	7200	3426,90	20,94%	7200
	RC201	2135,17	11,57%	7200	2316,69	22,38%	7200

Tabela 2 - Resultados obtidos para o modelo IRPTW

Instâncias		(1) + (3)			(1) + (2) + (3)		
C	Classe	F.O.	Gap	Tempo (s)	F.O.	Gap	Tempo (s)
25	C101	927,75	21,80%	7200	920,88	23,57%	7200
	C201	665,71	0,00%	16,38	665,71	0,00%	20,17
	R101	1682,85	0,00%	11,03	1682,85	0,00%	20,94
	R201	1407,57	0,00%	855,18	1407,57	0,00%	3356,35
	RC101	1702,49	15,90%	7200	1634,60	12,45%	7200
	RC201	1083,72	0,00%	425	1083,72	0,00%	335,59
50	C101	1935,19	31,07%	7200	1966,17	33,50%	7200
	C201	1214,01	2,13%	7200	1214,01	6,89%	7200
	R101	3069,58	0,00%	5050,76	3127,35	2,58%	7200
	R201	2315,62	1,15%	7200	2315,20	6,19%	7200
	RC101	3456,84	19,74%	7200	3370,50	19,05%	7200
	RC201	2102,43	8,51%	7200	2072,68	12,23%	7200

Tabela 3 – Continuação dos resultados obtidos para o modelo IRPTW

As tabelas 2 e 3 apresentam os resultados obtidos para as configurações de teste consideradas. Embora as instâncias considerando 50 clientes tenham atingido o limite máximo de otimização em quase todas os casos, os *gaps* calculados se mostraram pequenos, indicando que as soluções determinadas não estão longe da otimalidade. Estes valores reduzidos de *gap* são observados principalmente para a configuração de teste (1) + (3).

Instâncias		(1) + (2)		(1) + (3)		(1) + (2) + (3)	
C	Classe	F.O	Tempo	F.O	Tempo	F.O	Tempo
25	C101	1,92%	0,00%	1,76%	0,00%	1,03%	0,00%
	C201	0,00%	2,42%	0,00%	-23,14%	0,00%	0,00%
	R101	0,00%	58,57%	0,00%	-30,83%	0,00%	31,09%
	R201	0,00%	30,07%	0,00%	-207,69%	0,00%	21,60%
	RC101	-0,58%	0,00%	4,62%	0,00%	0,66%	0,00%
	RC201	0,00%	-130,47%	0,00%	-7,58%	0,00%	-36,24%
50	C101	2,89%	0,00%	-1,77%	0,00%	-0,16%	0,00%
	C201	0,00%	0,00%	0,00%*	0,00%	0,00%	0,00%
	R101	0,00%	0,00%	0,00%	-42,55%	1,85%	0,00%
	R201	1,66%	0,00%	0,04%	0,00%	0,02%	0,00%
	RC101	-1,00%	0,00%	-0,12%	0,00%	-2,69%	0,00%
	RC201	7,84%	0,00%	-1,56%	0,00%	-3,01%	0,00%

Tabela 4 - Comparativo entre os resultados do modelo exato e das outras três abordagens

A tabela 4 apresenta um comparativo de resultados entre o modelo matemático com apenas a heurística de solução inicial e as modelagens considerando também desigualdades válidas. No caso da instância C201 com 50 clientes, o modelo com a configuração (1) + (3) apresentou o menor gap (2,13%). É possível observar que dentre as combinações consideradas, as desigualdades do grupo (3) apresentaram, em geral, os melhores resultados dentre todas as três abordagens.

Instâncias		Melhor solução obtida		Lappas, Kritikos e Ioannou (2017)		Comparativo
C	Classe	FO	Tempo (s)	FO	Tempo (s)	FO
25	C101	911,39	7200	1115,4	142,51	-22,38%
	C201	665,705	16,38	883,8	165,43	-32,76%
	R101	1682,85	11,03	1880,09	68,96	-11,72%
	R201	1407,57	855,18	1629,61	135,56	-15,77%
	RC101	1614,35	7200	1892,24	82,06	-17,21%
	RC201	1083,72	198,39	1521,46	213,6	-40,39%
50	C101	1935,19	7200	2077,38	1082,7	-7,35%
	C201	1214,01	7200	1614,11	2119,3	-32,96%
	R101	3069,58	5050,76	3462,52	461,92	-12,80%
	R201	2314,75	7200	2626,25	1537,7	-13,46%
	RC101	3370,5	7200	3907,74	556,18	-15,94%
	RC201	2072,68	7200	2878,27	2241	-38,87%

Tabela 5 - Comparativo entre os melhores resultados obtidos e os resultados obtidos por Lappas et al. (2017)

Na tabela 5 estão apresentados os comparativos entre o modelo matemático proposto por este trabalho e os resultados obtidos pela heurística de Lappas et al. (2017). O modelo proposto para o IRPTW foi capaz de encontrar melhorias em todas as instâncias analisadas do problema, encontrando tanto novos valores ótimos quanto novas melhores soluções.

5. Conclusão

Neste trabalho, um modelo IRPTW básico foi proposto em conjunto com uma heurística construtiva de solução inicial e dois conjuntos já estabelecidos de desigualdades válidas para problemas IRP. Os grupos de desigualdades válidas foram avaliados individualmente e em conjunto, sendo observado melhores resultados quando o modelo teve auxílio do grupo de desigualdades de controle de estoque.

Este conjunto de desigualdades, atuando principalmente na alteração dos limites inferiores e superiores das variáveis de nível de estoque e no estabelecimento de pisos inferiores para o número de entregas que cada cliente deveria possuir, apresentou resultados melhores para 7 dos 12 casos avaliados. Considerando as instâncias testadas neste trabalho, a modelagem proposta conseguiu apresentar novas melhores soluções para todos os 12 casos, sendo estas na faixa de 7% – 40% melhores que as relatadas por Lappas et al (2017).

Estes resultados demonstram que o uso de ferramentas como desigualdades válidas pode ser um fator de grande interesse na modelagem de futuros trabalhos nesta área. O fato de um grupo de desigualdades referente às variáveis de controle de estoque terem proporcionado bons resultados também mostra que este aspecto deve ser evidenciado neste tipo de problema, e não menosprezado, como observado em diversos trabalhos presentes na literatura.

Dentre outras possíveis ferramentas de interesse para possíveis abordagens exatas do IRPTW, técnicas de pré-processamento de modelo ou de recálculo de janelas de tempo a partir da técnica de *time windows tightening*, proposta por Ascheuer et al. (2001), tem potencial para melhorar ainda mais o desempenho destes modelos. Procedimentos heurísticos também poderiam ser implementados em processos de otimização exato, como o uso de algoritmos de *Local Branching*, ou até mesmo métodos baseados em *Branch-and-Cut* com a aplicação de cortes específicos levando em conta a formulação com janelas de tempo.

Referências

ASCHEUER, N.; FISCHETTI, M.; GRÖTSCHHEL, M. Solving the Asymmetric Travelling Salesman Problem with time windows by branch-and-cut. *Mathematical Programming*, v. 90, n. 3, p. 475–506, 2001.

COELHO, L. C.; LAPORTE, G. An optimised target-level inventory replenishment policy for vendor-managed inventory systems. *International Journal of Production Research*, v. 53, n. 12, p. 3651–3660, 2015.

GUIMARÃES, T. A.; COELHO, L. C.; SCHENEKEMBERG, C. M.; SCARPIN, C. T. The two-echelon multi-depot inventory-routing problem. *Computers & Operations Research*, v. 101, p. 220–233, 2019.

HSU, C.-I.; HUNG, S.-F.; LI, H.-C. Vehicle routing problem with time-windows for perishable food delivery. *Journal of Food Engineering*, v. 80, n. 2, p. 465–475, 2007.

LAPPAS, P. Z.; KRITIKOS, M. N.; IOANNOU, G. D. A Two-phase Solution Algorithm for the Inventory Routing Problem with Time Windows. *Journal of Mathematics and System Science*, v. 7, n. 9, 2017. Disponível em: <<http://www.davidpublisher.org/index.php/Home/Article/index?id=33463.html>>. Acesso em: 27/3/2019.

LAU, H. C.; LIM, A.; LIU, Q. Z. Solving a Supply Chain Optimization Problem Collaboratively. *AAAI-00*, p. 6, 2000.

LAU, H. C.; LIU, Q.; ONO, H. Integrating Local Search and Network Flow to Solve the Inventory Routing Problem. *AAAI-02*, p. 6, 2002.

LAU, H. C.; LIM, M. K.; WAN, W. C.; WANG, H.; WU, X. Solving Multi-Objective Multi-Constrained Optimization Problems Using Hybrid Ants System and Tabu Search. *AAAI-03*, p. 10, 2003.

LEFEVER, W. *Stochastic and Robust Optimization Algorithms for the Inventory- Routing Problem and its Extensions*. Ghent: Ghent University, 2018.

LI, K.; CHEN, B.; SIVAKUMAR, A. I.; WU, Y. An inventory–routing problem with the objective of travel time minimization. *European Journal of Operational Research*, v. 236, n. 3, p. 936–945, 2014.

LIU, S.-C.; LEE, W.-T. A heuristic method for the inventory routing problem with time windows. *Expert Systems with Applications*, v. 38, n. 10, p. 13223–13231, 2011.

OSVALD, A.; STIRN, L. Z. A vehicle routing algorithm for the distribution of fresh vegetables and similar perishable food. *Journal of Food Engineering*, v. 85, n. 2, p. 285–295, 2008.

RAHIMI, M.; BABOLI, A.; REKIK, Y. A bi-objective inventory routing problem by considering customer satisfaction level in context of perishable product. *2014 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Production and Logistics Systems (CIPLS)*. p.91–97, 2014. Orlando, FL, USA: IEEE. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7007166/>>. Acesso em: 27/3/2019.

RAHIMI, M.; BABOLI, A.; REKIK, Y. Inventory routing problem for perishable products by considering social issue. *2015 IEEE International Conference on Service Operations And Logistics, And Informatics (SOLI)*. p.116–121, 2015. Yasmine Hammamet, Tunisia: IEEE. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/document/7367604/>>. Acesso em: 27/3/2019.

RAHIMI, M.; BABOLI, A.; REKIK, Y. Inventory Routing Problem for Perishable Products by Considering Customer Satisfaction and Green Criteria. In: M. Freitag; H. Kotzab; J. Pannek (Orgs.); *Dynamics in Logistics*. p.445–455, 2017. Cham: Springer International Publishing. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-45117-6_39>. Acesso em: 27/3/2019.

SOLOMON, M. M. Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints. *Operations Research*, v. 35, n. 2, p. 254–265, 1987.