

## Estudo de Caso da Aplicação de Métodos Lineares para Auxílio no Processo de Tomada de Decisão em uma Indústria de Laticínios

Flávio Henrique Batista de Souza<sup>1</sup>, Guilherme Alves Teixeira<sup>2</sup>, Diego Rodrigues Andrade Simão<sup>3</sup>

**Resumo:** Este trabalho apresenta um estudo de caso de aplicação prática de otimização da produção, com o objetivo da maximização do lucro, de uma indústria de laticínios situada no interior de Minas Gerais. Foi proposta uma modelagem matemática que considera os produtos oferecidos pela empresa e, através do algoritmo Simplex, foi avaliada a eficácia do modelo. Apresenta-se por este, a comparação entre o resultado sugerido pelo algoritmo e o alcançado pela empresa, bem como as variáveis envolvidas no processo produtivo, as complexidades não quantificadas, as sazonalidades presentes, as mudanças de mercado, variação do preço das commodities, entre outros fatores que compõem o processo do negócio. Os valores apresentados nessa pesquisa compõem um estudo real de adequação estratégica entre uma gestão orientada pelo conjunto ferramental baseado em PO, e as questões de mercado em um cenário real e complexo que apresentam variações em torno de 20%

**Palavras chave:** Laticínios. Programação Linear. Simplex.

### Case Studying of an Application of Linear Methods for Aid in the Decision-Making Process in a Dairy Industry

**Abstract:** This work presents a case study of the practical application of optimization of the production, with the objective of profit maximization, of a dairy industry located in the interior of Minas Gerais. It was proposed a mathematical modeling that considers the products offered by the company and, through the Simplex algorithm, the efficacy of the model was evaluated. We present a comparison of the results suggested by the algorithm and the results obtained by the company, as well as the variables involved in the production process, the unquantified complexities, the present seasonality, market changes, commodity price variation, other factors that make up the business process. The values presented in this research compose a real study of strategic suitability between management oriented by the tool set based on PO, and the market questions in a real and complex scenario that present variations around 20%.

**Key-words:** Dairy Products. Linear Programming. Simplex.

#### 1. Introdução

O setor brasileiro de agricultura e laticínios carece de evoluções processuais, que sejam assistidas por conceitos fundamentados de otimização e tecnologia. Tal afirmativa conduz à análise da viabilidade da aplicação da Pesquisa Operacional (PO) em uma empresa do ramo de laticínios (uma indústria de laticínios de médio porte de Minas Gerais/Brasil), visando a otimização e maximização das margens de contribuição, auxiliando no processo de tomada de decisão e respeitando as restrições que são apresentadas ao problema. O objetivo deste trabalho é pesquisa a utilização da PO no auxílio da tomada de decisões estratégicas de uma indústria de médio porte, do setor de laticínios. Os objetivos específicos consistem em:

<sup>1</sup> Autor correspondente, (Centro Universitário de Belo Horizonte - UNIBH) [flabasouza@yahoo.com.br](mailto:flabasouza@yahoo.com.br),

<sup>2</sup> (Centro Universitário de Belo Horizonte - UNIBH) [guilhermealvesteixeira21@gmail.com](mailto:guilhermealvesteixeira21@gmail.com),

<sup>3</sup> (Universidade Federal de Minas Gerias - UFMG) [diegoandradesimao@gmail.com](mailto:diegoandradesimao@gmail.com),

analisar as peculiaridades da indústria de laticínios; relativizar conceitos de PO no ambiente de produção analisado; desenvolver um modelo matemático com a identificação das variáveis do processo; elencar as restrições que devem ser respeitadas; utilizar o algoritmo simplex; avaliar as possíveis respostas apresentadas e implementar a otimização no ambiente de produção; aplicar tais conceitos na empresa de laticínios e analisar os resultados alcançados e os riscos inerentes. A justificativa deste trabalho é sustentada pela necessidade de soluções inteligentes e viáveis de produção, que são almejadas pelas organizações que querem se manter no mercado.

Segundo a Confederação da Agricultura e Pecuária do Brasil, CNA (2016), o produto interno bruto (PIB) em 2016, cresceu 4,4% no comparativo com o ano anterior, 2015, no mesmo ano em que o PIB nacional recuou em 3,6% uma recessão histórica, tendo o setor agropecuário grande representatividade no PIB nacional. Porém tal setor carece de otimizações em seus processos para torna-los mais eficientes, como citado por Berger & Hovav(2013).

A PO, segundo o Loesch & Hein (2009), pode ser classificada como ciência do conhecimento. Por ser entendida como ciência, a PO utiliza-se do desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, objetivando em comparar e prever qual a melhor estratégia para a tomada de decisão. Neste caso, a PO contribui para a tomada de decisão no setor de laticínios, tanto no monitoramento dos custos correlacionados no processo e margens de contribuição, quanto as variáveis produtivas, conforme mencionado por Mendes et. Al. (2010). A otimização de processos é fator decisivo na tomada de decisões empresariais, com isso, a busca por melhorias e vantagens competitivas, apresenta grande atratividade para investimento (MENDES, 2015).

Assim, algumas questões se tornam pertinentes: Quais variáveis este ambiente apresenta? Como seria um modelo matemático que atendesse a essa necessidade de otimização? Seria possível a utilização de ferramentas simples e difundidas na literatura, como Simplex, para aplicação do modelo proposto? Qual o grau de risco no projeto? Quais abstrações não são contempladas no processo? Quais dificuldades esse tipo de processo de otimização pode apresentar? Tais questões foram respondidas ao longo da pesquisa.

## 2. Referencial Teórico

### 2.1 Mercado de Laticínios

Segundo a Embrapa - Empresa Brasileira de Pesquisas Agropecuária (2015) o Brasil é o quarto maior produtor de leite cru in natura do mundo, ficando atrás dos Estados Unidos, em primeiro lugar, a Índia, que possui o maior rebanho de bovinos do mundo, porém não para fins comerciais e a China, em terceiro lugar.

A produção de leite no país, em 2013 foi de 36 milhões de toneladas, com um crescimento médio entre os anos de 2004 a 2013 de 4,1% ao ano, agregando a sua produção os valores em volume produzidos na Argentina e Uruguai. Ainda segundo a Embrapa (2015), de todo o mercado de lácteos mundial, a América Latina é responsável por 22% de todo o consumo de lácteos. Já em 2016, para ter uma perspectiva sobre a dimensão do mercado, estudos divulgados pelo IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatísticas (2016), a industrialização de leite no 1º trimestre de 2016 foi de 5,86 bilhões de litros, sendo Minas Gerais a maior bacia leiteira do país, onde também está a maior parcela de indústrias do setor e muitas dedicam-se especialmente à produção de queijos.

## 2.2 Processo de Produção

Para transformar o leite em queijo, são necessários alguns processos isolados, De Paula et al. (2009) destaca que os principais: Coagulação, acidificação, dessoramento do grão (sinérese), enformagem e salga.

Os autores ainda ressaltam que, o queijeiro pode controlar a composição do queijo, intervindo nessas etapas, o que pode influenciar diretamente na maturação e na qualidade final do produto. Também frisam que o primeiro passo para a fabricação é a seleção microbiológica e química do leite, pois é fundamental que a matéria prima esteja livre de antibióticos e com a contaminação microbiológica possível, garantindo a maior chance de ganho em qualidade na fabricação do queijo. A fabricação de queijo com o leite sem tratamento térmico (Leite cru in natura) é permitida apenas quando o produto seja submetido ao processo de maturação por um período mínimo de 60 dias.

Salvo a exceção dos queijos maturados, o próximo passo é o tratamento térmico do leite, que geralmente chega resfriado aos laticínios, por volta de 4º C e passa pelo processo de pasteurização, que segundo Tamanini, et al (2007) é um processo de aquecimento rápido à temperatura de 72 a 75º C durante um breve período de tempo, entre 15 a 20 segundos, com o objetivo de eliminar os contaminantes microbiológicos do leite. Após a pasteurização o leite é coalhado, onde há a adição do coalho para provocar a quebra das enzimas do leite, que passa a ter uma textura de gel e ocupa o mesmo volume do leite. Após um tempo, a coalhada é cortada em grãos menores e cúbicos, ocorrendo o dessoramento, preparando a massa, em blocos, para o processo de acidificação, que segundo Valsechi (2001), é a transformação da lactose em ácido láctico, através das bactérias lácteas e com o objetivo de reduzir o pH para valores entre 5,0 e 5,5.

Com a finalização do processo de acidificação, a massa de queijo pode seguir em dois processos diferentes, a enformagem e prensagem, em queijos como minas padrão e parmesão, e a filagem, como no queijo mussarela e seus tipos. Ocorre no processo enformagem e prensagem, a moldagem do queijo em seu formato específico, levando em consideração o tipo de queijo a ser produzido, geometria e tamanho, para que ocorra a prensagem, que tem como objetivo o a drenagem do excesso de soro ainda presente entre os grãos, homogeneizando a massa. Já no processo de filagem, a massa é fatiada em laminas com finas espessuras, aquecida em água, esticada e moldada no formato desejado, agregando ao queijo uma estrutura filamentosa e fibrosa bem característica. (DE PAULA et al, 2009).

De Paula et al (2009) ainda informa que o processo de salga, dentre as várias etapas da fabricação, um destaque, pois o mesmo proporciona através do sal (NaCl) funções como controle microbiano, sabor, entre outros. No processo de salga, o queijo é imerso em salmouta (água e sal), por um período de tempo ou é coberto em sua totalidade pelo sal sem diluição.

## 2.3 Modelagem Matemática e Programação Linear

De acordo com Prado (2010), programação linear (PL) é uma técnica de planejamento que apresenta resultados em diversas atividades e ramo do cotidiano. Benefícios apresentados como aumento de lucros, diminuições de custos, entre outros são amplamente procurados pelas empresas, ainda mais em um cenário atual concorrido. A programação linear baseia-se em técnicas matemáticas e utiliza-se de softwares para auxiliar na busca as resoluções de tais problemas. Atualmente, dentre diversas técnicas de gestão disponíveis, a programação linear

é, sem dúvidas, uma das mais poderosas. Um número elevado de aplicações em diversos cenários e ramos já tiveram aplicações, que buscam economias ou maximizações. Problemas resolvidos com a programação linear apresentam garantias relevantes de que não haverá soluções com melhor desempenho, desde que estejam adequadas a modelagem e a solução.

### 2.3.1 Simplex

O método Simplex, segundo Carvalho (2014) centra-se, especificamente, nas soluções de ponto extremo, máximos e mínimos, visando encontrar a solução que melhor se enquadra de acordo com o objetivo e restrições apresentadas. Trata-se de um algoritmo iterativo (procedimento sistemático para atingir uma solução e que se repete uma série de passos), onde segue os seguintes passos:

- 1 – Introduzir as variáveis de folga, uma para cada desigualdade;
- 2 – Montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na última linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada;
- 3 – Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga;
- 4 – Como próxima variável a entrar na base, escolher a variável não básica que oferece, na última linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo. Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.
- 5 – Para escolher a variável que deve deixar a base, deve-se realizar o seguinte procedimento:
  - I – Dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. Caso não haja elemento nenhum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.
  - II – O menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não básica.
- 6 – Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.
- 7 – Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

Ainda de acordo com Carvalho (2014), o método Simplex possui fundamentos teóricos, tais como, hipóteses, teoremas, condições ou restrições, que são necessárias para o bom funcionamento do método, possibilitando assim, uma possível solução para o problema apresentado.

### 2.3.3 Pesquisa Operacional na indústria Agropecuária e de Laticínios

Apesar de ainda carecer de maiores investimentos e pesquisas, há alguns trabalhos que são direcionados para a otimização dos processos produtivos no setor em questão. Como exemplo, podem ser citados alguns trabalhos como o de Papathanasiou & Manos (2007).

Neste trabalho os autores enunciam que o problema de localização da instalação constitui uma parte importante do planejamento estratégico de uma empresa de produção de leite.

Também em 2007, Doganis et. Al. (2007) apresentaram um modelo de Programação Linear Inteira Misto (MILP) para o agendamento de produção ideal em uma única linha de produção de iogurte. O modelo considera características especiais que caracterizam a produção de iogurte.

Kelemen et Al. (2015) apresentam os métodos utilizados até o momento para a modelagem matemática e as técnicas de otimização do setor agropecuário. Os autores comentam sobre o fato de que, tanto os agricultores como os funcionários envolvidos na pesquisa de gado, possuem uma série de softwares informáticos, muito acessíveis, que permitem uma análise rápida e eficiente de informações que criam modelos matemáticos desenvolvidos para otimizar a tecnologia de produção leiteira.

Mais recentemente, Masson et al. (2016) consideram o problema anual do transporte de produtos lácteos, que envolve a concepção das rotas que coletam leite das fazendas e o transporte para as fábricas de processamento. Mu et al. (2017) exploram as correlações entre os indicadores de NB (balanço de nutrientes) e LCA (avaliação do ciclo de vida), a fim de identificar um conjunto de indicadores eficazes que podem ser usados como parâmetro de avaliação comparativa do desempenho ambiental das fazendas leiteiras.

Pode-se perceber nos trabalhos realizados tanto a demanda por soluções robustas, quanto o fato de que softwares difundidos podem auxiliar na permeabilidade da Pesquisa Operacional nesse ramo nas diversas frentes de trabalho que o setor apresenta.

### 3. Metodologia

Definidos os objetivos, o estudo de caso demonstra que há incertezas sobre o resultado, pois apresenta uma situação de um problema real e com complexa solução.

As atividades a serem desenvolvidas obedecem à seguinte sequência: analisar e registrar o processo produtivo; elencar os objetivos e produtos relacionados; identificação das variáveis; definição da modelagem matemática; verificação da linearidade; seleção e aplicação do algoritmo; análise de resultados; e cálculo de impactos na produção.

Para a realização dos experimentos foram, primeiramente, feitos estudos para analisar e registrar os processos do ambiente de produção e analisar quais os produtos que poderiam ser elencados para o processo de otimização e retratados na modelagem matemática, segundo o ambiente de produção, onde existem variáveis de caráter quantitativo e qualitativo, como capacidade produtiva dos equipamentos, mão de obra disponível, matéria prima a ser processada, demanda estipulada no período, entre outros fatores.

Depois foi verificado se o problema poderia ser retratado sobre um problema de programação linear, onde cada fator descrito acima assumiria uma variável pertencente ao processo, adequando à realidade do ambiente de produção em termos quantitativo e qualitativo e adequando ao processo de fabricação vigente, segundo as normas da empresa estudada e legislação vigente no país. De posse desse estudo, foi definido matematicamente o objetivo a ser alcançado e conseqüentemente o modelo matemático que pode assumir as condições da organização. Diante disso foi aplicado o algoritmo Simplex para os experimentos e análises de possíveis otimizações, pois o seu objetivo está centrado na localização do ponto ótimo, ou seja, o que melhor atenda a todas as variáveis presente no processo e na modelagem, com o

objetivo de otimizar os resultados alcançados pela empresa, proporcionando uma possível maximização das margens de contribuição e como consequência apresentar uma maior rentabilidade para a empresa.

Após a obtenção dos resultados alcançados pelo algoritmo, deve ser realizada uma análise de coerência e viabilidade da aplicação das mudanças recomendadas. Essa atividade deve ser realizada juntamente com uma análise de riscos. Essa avaliação deve mensurar os impactos positivos e negativos que vão ser apresentados durante as alterações que a empresa deve realizar para alcançar os resultados propostos pelo processo de otimização.

Além da avaliação das alterações, o cálculo de riscos pode interferir no modelo matemático proposto, onde caso sejam necessárias alterações, elas poderão ser realizadas, sem impactos ou custos à organização, sendo essa uma das grandes vantagens de um planejamento que considera simulações de processos, pois a organização não terá nenhum ônus durante a elaboração da proposta.

#### 4. Resultados

Os resultados dessa pesquisa são caracterizados pela identificação de parâmetros e variáveis que o problema apresenta, pela construção de um modelo matemático nos moldes de um PPL (Problema de Programação Linear), pela aplicação do algoritmo Simplex e, por fim, uma análise estatística de resultados da produtividade da empresa. Cabe ressaltar que todos os dados apresentados, além de permitidos pela empresa, são valores reais, tanto os financeiros quanto os quantitativos, caracterizando uma aplicação totalmente prática dos conceitos de Pesquisa Operacional.

##### 4.1 Identificação de Parâmetros

Os parâmetros e variáveis pertencentes ao modelo são identificados de acordo com as características e as restrições do processo produtivo impostas pelo processo produtivo da empresa. Em resumo elas são relacionadas à capacidade produtiva geral e específica de cada produto, segundo a sua: Forma; Quantidade e tipo de leite disponível no mês; Demanda prevista no mês; Lucratividade de acordo com custo de cada produto (abordando as oscilações do mercado).

Primeiramente foram feitas as identificações de parâmetros pertencentes ao modelo matemático, discriminando todos os itens envolvidos no processo, como os produtos fabricados, as variáveis de produção, matérias primas, capacidade produtiva, entre outros como demonstrado nas tabelas a seguir. O período compreende um tempo de  $y$  meses em que foram analisadas as otimizações do processo e implementado o algoritmo proposto, sendo os meses de Março (onde  $y = 1$ ), Abril (onde  $y = 2$ ), Maio (onde  $y = 3$ ) de 2019.

Na Tabela 1 é possível identificar quais são os itens  $i$  fabricados pela indústria de laticínios, onde  $i$  é o índice dos itens produzidos. São produzidos 32 produtos diferentes, então  $i = \{1, 2, \dots, 32\}$ . No caso  $x_i$  é a quantidade da produção  $x$  do produto  $i$ .

Já na Tabela 2, são apresentados quais são os limites  $l_j$  impostos pelas variáveis no processo de produção, tais como quantidade de leite disponível, meta de produção e venda, capacidade das formas. São encontrados  $j = \{1, 2, \dots, 14\}$  limitantes dentro do processo. Nota-se que  $l_{14}$  é um elemento heurístico, uma vez que não tem um valor predeterminado, mas força o algoritmo a explorar uma produção mínima de produtos que podem não oferecer a melhor lucratividade, mas tem importância estratégica para a empresa.

$x_i$	Descrição do Produto	$x_i$	Descrição do Produto	$x_i$	Descrição do Produto
$i = 1$	Minas Vila Caipira	$i = 12$	Kit Quatro Queijos	$i = 22$	Trança Vinho
$i = 2$	Trufado Vila Caipira	$i = 13$	Minas Frescal	$i = 23$	Kit Trancinha
$i = 3$	Minas Padrão Zero Lactose	$i = 14$	Reino	$i = 24$	Provolone (Salaminho)
$i = 4$	Minas Frescal de Búfala	$i = 15$	Prato	$i = 25$	Trancinhas
$i = 5$	Requeijão Búfala	$i = 16$	Cabacinha	$i = 26$	Palito
$i = 6$	Manta de Búfala	$i = 17$	Bolinha	$i = 27$	Nozinho
$i = 7$	Bolinha de Búfala	$i = 18$	Parmesãozinho	$i = 28$	Tranças
$i = 8$	Mussarela de Búfala	$i = 19$	Kit Provoleta	$i = 29$	Provolone
$i = 9$	Bolinha de Búfala no Soro	$i = 20$	Trança Tomate Seco	$i = 30$	Parmesão Cunha
$i = 10$	Requeijão	$i = 21$	Provoleta	$i = 31$	Rock For
$i = 11$	Minas Padrão			$i = 32$	Queijo coalho

Tabela 1 – Produtos

Limites	Descrição	Qde.	Limites	Descrição	Quantidade
$l_1$	Leite de vaca disponível (Litros)	500000	$l_8$	Forma Cunha (unid.)	2500
$l_2$	Leite de Búfala disponível(Litros)	70000	$l_9$	Forma Filados(unid.)	18000
$l_3$	Meta de produção e venda (unidades)	60000	$l_{10}$	Forma Frescal (unid.)	2000
$l_4$	Forma 600g (unidades)	10000	$l_{11}$	Forma Muss. (unid.)	8000
$l_5$	Forma 900g (unidades)	20000	$l_{12}$	Forma Req. (unidades)	13500
$l_6$	Forma Buf. (unidades)	4000	$l_{13}$	Forma Truf. (unid.)	3000
$l_7$	Forma Coalho (unidades)	1700	$l_{14}$	Limite de Produção	$88,1513l_3$

Tabela 2 – Limites

A Tabela 3 representa a quantidade de leite de búfala (em litros) consumida para obter 1Kg de queijo e suas variações no período avaliado.

$LB_{iy}$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$LB_{iy}$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$i = 4$	5,00	4,90	4,80	$i = 7$	6,50	6,40	6,50
$i = 5$	5,60	5,50	5,60	$i = 8$	6,50	6,40	6,50
$i = 6$	6,50	6,40	6,50	$i = 9$	1,63	1,50	1,63

Tabela 3 – Média de leite de Búfala consumido por produto (em Litros)

A Tabela 4 apresenta o consumo de leite de vaca referente a cada produto no decorrer dos meses avaliados, ou seja, a quantidade gasta de leite para obter 1 Kg de queijo.

$Lv_{iy}$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$Lv_{iy}$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$Lv_{iy}$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$
$i = 1$	9,05	9,00	9,05	$i = 16$	10,00	10,00	10,00	$i = 26$	10,00	10,00	10,00
$i = 2$	5,24	5,20	5,28	$i = 17$	10,00	10,00	10,00	$i = 27$	10,00	10,00	10,00
$i = 3$	9,20	9,15	9,22	$i = 18$	8,90	8,70	8,80	$i = 28$	10,00	10,00	10,00
$i = 10$	8,66	8,60	8,68	$i = 19$	10,00	10,00	10,00	$i = 29$	10,00	10,00	10,00
$i = 11$	9,20	9,15	9,22	$i = 20$	10,00	10,00	10,00	$i = 30$	11,00	11,00	11,00
$i = 12$	9,20	9,15	9,22	$i = 21$	10,00	10,00	10,00	$i = 31$	10,00	10,00	10,00
$i = 13$	7,00	7,05	7,10	$i = 22$	10,00	10,00	10,00	$i = 32$	12,00	12,00	12,00
$i = 14$	9,20	9,15	9,22	$i = 23$	10,00	10,00	10,00				
$i = 15$	9,20	9,15	9,22	$i = 24$	10,00	10,00	10,00				
$i = 16$	10,00	10,00	10,00	$i = 25$	10,00	10,00	10,00				

Tabela 4 – Média de Leite de Vaca Consumido por Produto (em Litros)

A Tabela 5 representa as restrições que o problema apresenta, de acordo com o processo produtivo. Pode ser visualizado que foram identificadas 14 limitações, sendo que a última é

uma obrigatoriedade da análise de um problema de programação linear, que não permite que as variáveis gerem valores negativos de produção. Os parâmetros foram avaliados e configurados em um modelo matemático que representa o núcleo da análise proposta.

Restrição	Descrição	Restrição	Descrição
1	Disponibilidade de Leite de Vaca	8	Capacidade de produção Forma Cunha
2	Disponibilidade de Leite de Búfala	9	Capacidade de produção Forma Filados
3	Meta de produção e venda	10	Capacidade de produção Forma Frescal
4	Capacidade de produção Forma 600g	11	Capacidade de produção Forma Mussarela
5	Capacidade de produção Forma 900g	12	Capacidade de produção Forma Req.
6	Capacidade de produção Forma Buf.	13	Capacidade de produção Forma Trufada
7	Capacidade de produção Forma Coalho	14	Não negatividade

Tabela 5 – Restrições

O modelo matemático foi gerado durante uma análise de 2 meses do processo, entre os meses de janeiro e fevereiro de 2019. Assim o Modelo Matemático se torna:

$$\text{Maximize } \sum_{i=1}^n LC_i PV_i x_i \quad (1)$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} & LV_1 x_1 + LV_2 x_2 + LV_3 x_3 + LV_4 x_4 + LV_{10} x_{10} + LV_{11} x_{11} + LV_{12} x_{12} + LV_{13} x_{13} \\ & \quad + LV_{14} x_{14} \\ & + LV_{15} x_{15} + LV_{16} x_{16} + LV_{17} x_{17} + LV_{18} x_{18} + LV_{19} x_{19} + LV_{20} x_{20} + LV_{21} x_{21} \\ & \quad + LV_{22} x_{22} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & + LV_{23} x_{23} + LV_{24} x_{24} + LV_{25} x_{25} + LV_{26} x_{26} + LV_{27} x_{27} + LV_{28} x_{28} + LV_{29} x_{29} \\ & \quad + LV_{30} x_{30} \\ & + LV_{31} x_{31} + LV_{32} x_{32} \leq l_1 \\ & LB_4 x_4 + LB_5 x_5 + LB_6 x_6 + LB_7 x_7 + LB_8 x_8 + LB_9 x_9 \leq l_2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq l_3 \quad (4)$$

$$x_3 + x_{12} + x_{14} + x_{15} + x_{18} \leq l_4 \quad (5)$$

$$x_1 + x_{11} \leq l_5 \quad (6)$$

$$x_6 + x_7 + x_9 \leq l_6 \quad (7)$$

$$x_{32} \leq l_7 \quad (8)$$

$$x_{30} \leq l_8 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & x_{16} + x_{17} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} \\ & \quad + x_{31} \leq l_9 \end{aligned} \quad (10)$$

$$x_4 + x_{13} \leq l_{10} \quad (11)$$

$$x_8 \leq l_{11} \quad (12)$$

$$x_5 + x_{10} \leq l_{12} \quad (13)$$

$$x_2 \leq l_{13} \quad (14)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i, i \in \{1, \dots, n\} \quad (15)$$

Onde  $n$  é o número de produtos analisados (onde  $n = 32$ ),  $x_i$  é a Produção dos Produtos  $i$  (onde  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ),  $LC_i$  é a Lucratividade de cada Produto  $i$  em termos percentuais (%) (onde  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ),  $l_j$  são os limites  $j$  de procedimentos (onde  $j = \{1, 2, \dots, 14\}$ ),  $PV_i$  é o Preço de Venda de cada Produto  $i$ , onde  $i = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $MP_i$  é a Média de consumo de leite por produto  $i$  (onde  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ ). O modelo matemático foi executado a cada mês  $y$  da análise, onde  $y = \{1, 2, 3\}$ . A expressão (1) é a representação da função objetivo para a maximização dos lucros, que são um percentual do preço de venda de cada produto. Já as inequações 2 a 15 são as 14 restrições, na respectiva ordem representada na Tabela 5. Esse modelo foi usado durante o processo de otimização, onde a cada mês foi realizada uma simulação com a modelagem matemática proposta.

#### 4.2 Análise do Processo de Otimização

Executado o Simplex, foi comparado o resultado entre o valor apresentado pelo simplex e o realizado pela empresa, conforme mostra a tabela 6.

Produto	Quantidade Março		Quantidade Abril		Quantidade Maio	
	Simplex	Realizado	Simplex	Realizado	Simplex	Realizado
Minas Vila Caipira	11.448,00	9.812,17	11.448,00	9.041,40	11.448,00	9.861,05
Trufado Vila Caipira	3.000,00	1.765,55	3.000,00	1.847,70	3.000,00	1.946,20
Minas Padrão Zero Lactose	1.525,65	2.459,53	1.525,65	2.235,55	1.525,65	2.521,97
Minas Frescal de Búfala	577,50	706,19	577,50	630,02	577,50	702,00
Requeijão Búfala	2.134,65	1.980,68	2.134,65	1.543,01	2.134,65	1.626,61
Manta de Búfala	84,00	41,38	84,00	23,95	84,00	37,27
Bolinha de Búfala	645,00	599,15	645,00	472,30	645,00	521,25
Mussarela de Búfala	4.761,75	5.906,21	4.761,75	4.372,79	4.761,75	4.604,33
Bolinha de Búfala no Soro	200,00	-	200,00	-	200,00	-
Requeijão	8.643,60	5.237,94	8.643,60	4.037,04	8.643,60	4.823,73
Minas Padrão	5.129,00	7.006,80	5.129,00	6.079,20	5.129,00	7.214,99
Kit Quatro Queijos	1.358,00	1.048,95	1.358,00	1.031,38	1.358,00	1.359,04
Minas Frescal	1.422,50	1.048,18	1.422,50	897,85	1.422,50	895,32
Reino	2.271,52	649,69	785,00	578,20	785,00	785,72
Prato	321,00	284,84	321,00	202,26	321,00	290,57
Cabacinha	165,00	128,87	165,00	118,50	165,00	140,10
Bolinha	150,00	114,17	1.517,59	76,20	1.192,39	145,87
Parmesãozinho	1.220,00	1.131,40	1.220,00	1.004,88	1.220,00	1.206,10
Kit Provoleta	861,00	763,82	861,00	692,03	861,00	863,36
Trança Tomate Seco	670,00	477,20	670,00	553,45	670,00	622,30
Provoleta	650,00	206,70	650,00	163,89	650,00	230,50
Trança Vinho	1.343,00	779,17	1.343,00	608,77	1.343,00	840,34
Kit Trancinha	660,00	550,77	660,00	631,55	660,00	851,83
Provolone com Salaminho	1.270,00	786,67	1.270,00	920,60	1.270,00	849,49
Trancinhas	387,00	54,25	387,00	46,70	387,00	41,15
Palito	4.100,00	3.074,63	4.100,00	2.932,71	4.100,00	3.486,63
Nozinho	340,00	172,87	340,00	259,90	340,00	275,90
Tranças	2.002,00	1.116,56	2.002,00	940,43	2.002,00	1.249,15
Provolone	2.093,00	1.540,19	2.093,00	1.413,16	2.093,00	1.580,55
Parmesão Cunha	1.991,00	1.569,93	1.991,00	1.515,56	1.991,00	1.809,28
Rock For	148,00	138,94	148,00	99,50	148,00	199,25
Queijo Coalho	1.429,00	1.428,07	1.429,00	1.249,90	1.700,00	1.434,04
<b>Total Vendido</b>	<b>63.001,17</b>	<b>52.581,48</b>	<b>62.882,24</b>	<b>46.220,39</b>	<b>62.828,04</b>	<b>53.015,89</b>

Tabela 6 – Valores de Produção por Produto

A Tabela 6 retrata os valores atingidos por produtos e pode-se avaliar a diferença entre o

indicado pelo processo de otimização e o realmente atingido pela empresa.

Pode-se observar que em alguns produtos, a demanda prevista foi superada, como é o caso do Minas Padrão Zero Lactose, que em todos os meses avaliados, superou o proposto pelo Simplex. Porém grande parte dos produtos que não atingiram o proposto pelo algoritmo, como é o exemplo do Requeijão, do Minas Vila Caipira, entre outros. Isso deve-se ao mercado e suas variações, pois cada mês apresenta condições diferentes, como dias úteis trabalhados, sazonalidades exclusivas, números de dias onde ocorre o maior pico de vendas, como sextas, sábados e segundas e a previsão da demanda ser feita pela média de vendas dentro de um determinado período, variáveis as quais o algoritmo não estava preparado para avaliar. Feita a avaliação produto a produto, pode-se realizar um comparativo avaliando o volume de vendas total proposto pelo algoritmo e o conquistado pela empresa, segundo o gráfico da Figura 1.

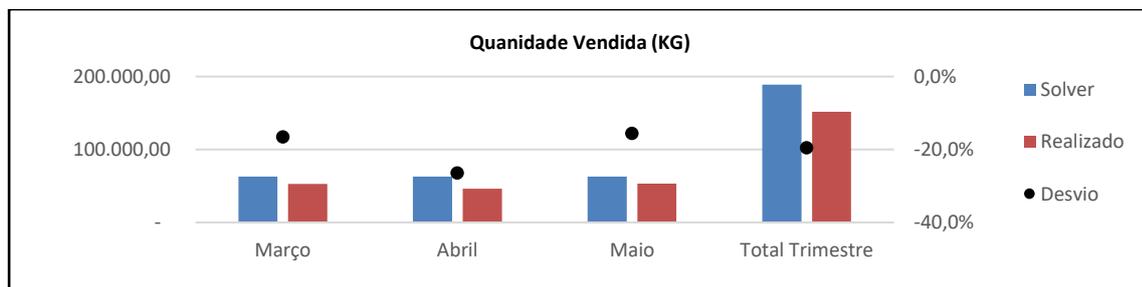


Figura 1 – Quantidade Vendida (KG)

Verifica-se que em nenhum mês foi realizado o proposto pelo algoritmo e a meta de vendas, deve-se isso às variações a condições oscilantes de mercado. Em especial no mês de abril, onde ocorre a maior diferença, e conseqüentemente o menor volume de vendas, de -26,5% em comparação ao simulado pelo simplex, causas como a quantidade dias trabalhados pela empresa ficam explícitas, pois neste mês, houveram dois feriados nacionais, nos quais a empresa encontrava-se fechada, outra causa identificada.

Já no mês de maio, onde ocorreu o maior número de vendas em KG, houve apenas um feriado, e mais dias foram trabalhados, possibilitando assim, uma maior quantidade vendida. Totalizando o trimestre, a diferença entre proposto pelo algoritmo e realizado não chegou a -20%, onde mais uma vez pode-se compreender que as variações do mercado influenciaram e muito no volume de vendas realizado pela empresa.

Através da Figura 2, pode-se avaliar também que o proposto como ponto ótimo pelo simplex não foi alcançado, mais uma vez se justificando pelas variações de mercado, sazonalidade e em especial nos meses de abril e maio, onde a principal matéria prima para a fabricação do queijo, o leite, subiu por volta de 10 centavos por litro, o que ocasionou um aumento significativo no custo direto dos produtos, chegando próximo a R\$ 1,00 por quilo e conseqüentemente uma perda na lucratividade, deixando o resultado alcançado menor que o proposto.

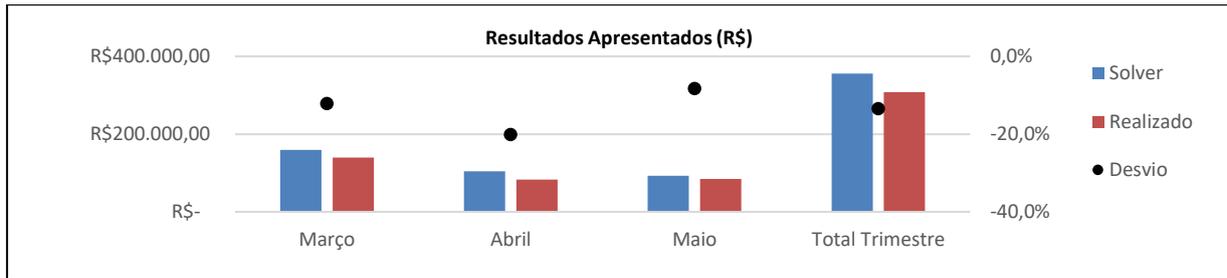


Figura 2 - Resultados Alcançados (R\$)

Analisando separadamente cada mês, identifica-se que o modelo não abrange todas as variáveis envolvidas no processo e no meio. Como exemplo o mês de março, onde ocorreu o maior resultado monetário no período, houve um desvio entre o realizado e o Simplex de 12,1%, ou seja, as intempéries do mercado não contempladas pelo modelo influenciaram de forma negativa no resultado alcançado. Já no mês de maio, onde ocorreu o menor desvio, de - 8,3%, o resultado monetário apresentado é ligeiramente maior que abril, porém bem abaixo de março, onde mais uma vez identifica-se como é dinâmico o mercado de commodities e suas oscilações em curtos períodos de tempo. Neste mês em especial, a margem de lucro da empresa foi reduzida e com isso, o montante em reais apresentado.

## 5. Conclusão

Com o algoritmo simplex, é possível simular cenários, possibilitando assim, o melhor trabalho de gestão à frente do negócio e sendo um auxiliador nas tomadas de decisões da empresa. Porém, por complexidades do ambiente e do problema, no processo há variáveis não discriminadas no algoritmo e sazonalidades que são de difícil quantificação, impossibilitando assim, a perfeita otimização a sugerida pelo algoritmo, tornando de certa forma inviável sua aplicação ideal, mas é viável em termos de aproximação.

Houve também a necessidade de acrescentar uma variável de controle, o Limite de Produção, com o intuito de balancear o algoritmo, a fim de não o deixar produzir apenas os produtos que apresentam maior lucratividade, superando excessivamente a demanda prevista e dificultando a venda, além de consumir todos os recursos disponíveis e deixando os demais produtos em falta.

Por fim, pode-se afirmar que com um trabalho de otimização de resultados apresentado pelo simplex é extremamente válido, pois o mesmo auxilia na gestão do negócio, possibilitando aos gestores avaliar quais produtos devem ser produzidos e comercializados em maior volume, pois estes estão dentro das capacidades e limites impostos pelos processos produtivos, disponibilidade de matéria prima, pela empresa, entre outros, tornando as tomadas de decisões mais assertivas e conscientes, apresentando resultados a curto prazo e otimizando a empresa, pois mesmo que os resultados ideais não tenham sido obtidos, um foco de lucro otimizado possibilita o norteamento da organização.

## Referências

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. **Pesquisa Operacional para cursos de Engenharia**. Elsevier Brasil, 2013.

BERGER, R.; HOVAV, A. Using a dairy management information system to facilitate precision agriculture: The case of the AfiMilk® system. **Information Systems Management**, v. 30, n. 1, p. 21-34, 2013.

CARVALHO, J. M. S. Programação Linear: Algoritmos simplex primal, dual, transporte e afetação. **Vida Econômica Editorial**, 2014.

CNA, Confederação da agricultura e pecuária do Brasil. 2016.

DE PAULA, J. C. J.; DE CARVALHO, A. F.; FURTADO, M. M. Princípios básicos de fabricação de queijo: do histórico à salga. **Revista do Instituto de Laticínios Cândido Tostes**, v. 64, n. 367, p. 19-25, 2009.

DOGANIS, P.; SARIMVEIS, H. Optimal scheduling in a yogurt production line based on mixed integer linear programming. **Journal of Food Engineering**, v. 80, n. 2, p. 445-453, 2007.

EMBRAPA - Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária. O mercado brasileiro de lácteos. **Congresso Internacional do Leite**. Porto Alegre, 2015.

IBGE- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Indicadores IBGE: Estatística da Produção Pecuária**. 2016

KELEMEN, A.; MARGINEAN, G. E.; VIDU, L. Mathematical modelling and optimisation techniques used in dairy farming. Scientific Papers: Series D, Animal Science-**The International Session of Scientific Communications of the Faculty of Animal Science**, v. 58, 2015.

LOESCH, C.; HEIN, N. **Pesquisa Operacional: fundamentos e modelos**. São Paulo: Saraiva, 2009.

MASSON, R.; LAHRICHI, N.; ROUSSEAU, L.M.. A two-stage solution method for the annual dairy transportation problem. **European Journal of Operational Research**, v. 251, n. 1, p. 36-43, 2016.

MENDES, A. C. A., SOALHEIRO, E. M., SILVEIRA, T. S., ZUCCOLOTTO, R., da COSTA, T. D. M. T. Simulação de Monte Carlo como Ferramenta de Apoio à Decisão em um Laticínio na Zona da Mata Mineira. In: **Anais do Congresso Brasileiro de Custos-ABC**. 2010.

MENDES, M. P. S. Aplicação da programação linear na decisão econômica de investimento. Tese de Doutorado. Instituto Politécnico de Setúbal. Escola Superior de Ciências Empresariais. 2015.

MU, W. van Middelaar, C. E., Bloemhof, J. M., Engel, B., de Boer, I. J. M. Benchmarking the environmental performance of specialized milk production systems: selection of a set of indicators. **Ecological indicators**, v. 72, p. 91-98, 2017.

PRADO, D. **Programação Linear**. 6 ed. Belo Horizonte. Editora indg tecnologia e serviços ltda, 2010.

PAPATHANASIOU, J.; MANOS, B. D. An approximation algorithm for the location of dairy enterprises under time constraints. **European journal of operational research**, v. 182, n. 3, p. 1479-1487, 2007.

TAMANINI, R., SILVA, L. C. C., MONTEIRO, A. A., MAGNANI, D. F., BARROS, M. A. F., BELOTI, V. Avaliação da qualidade microbiológica e dos parâmetros enzimáticos da pasteurização de leite tipo "C" produzido na região norte do Paraná. **Seminário: Ciências Agrárias**, Londrina, v. 28, n. 3, p. 449-454, 2007.

VALSECHI, O. A. O leite e seus derivados. **Tecnologia de Produtos Agrícolas de Origem Animal**. Araras, 2001.